

材料強度設計No.6

知能機械システム工学科

坂本東男

Sakamoto.haruo@kochi-tech.ac.jp

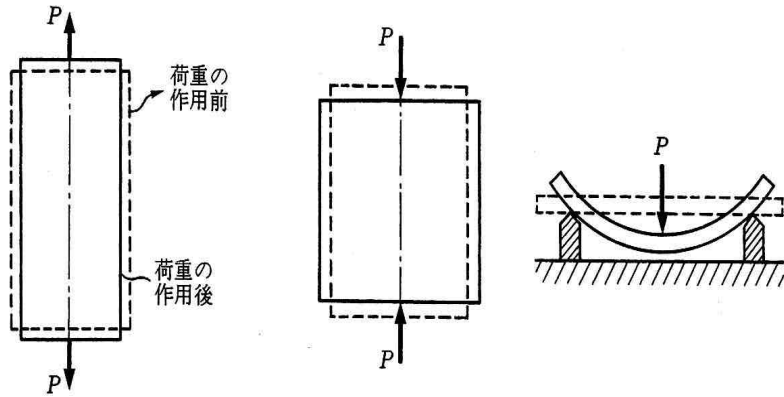
教員室A429、TEL:0887-57-2317

研究室A213、TEL:57-2243

講義内容 (材料力学の復習)

- 1 . 応力とひずみ
- 2 . 1軸荷重
- 3 . 2軸の垂直応力
- 4 . モールの円
- 5 . 一般の 2軸応力状態
- 6 . ひずみゲージとひずみ測定

荷重の種類



材料を引伸ばすように作用

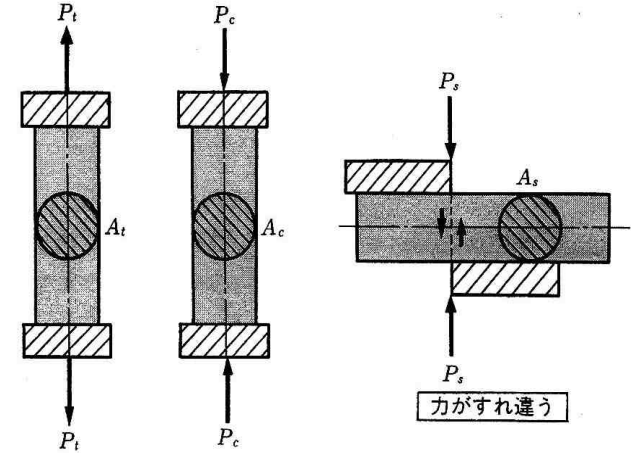
(a) 引張荷重

材料を縮めるように作用

(b) 圧縮荷重

材料を曲げるように作用

(c) 曲げ荷重

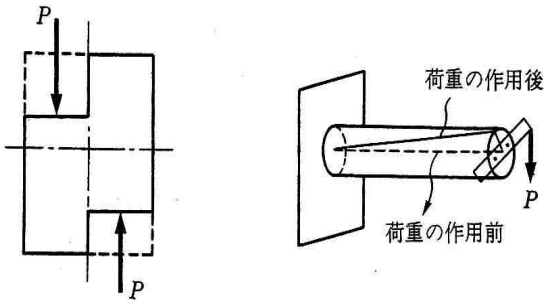


力が出合う

(a) 引張り (b) 圧縮

(c) せん断

図 1・10 3種の負荷の状態



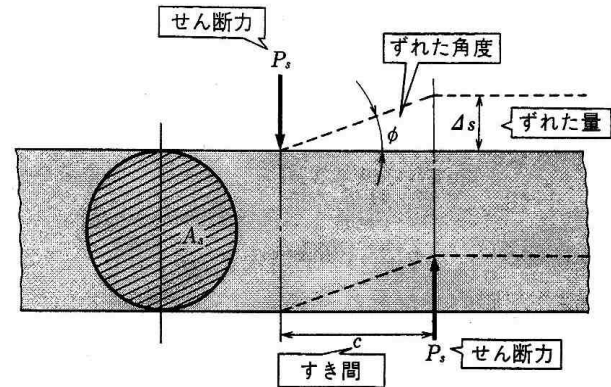
材料の任意断面をずらすように作用

(d) せん断荷重

材料をねじるように作用

(e) ねじり荷重

図 1.1 荷重の作用方法による分類



$$\begin{aligned} \text{応力} : \tau &= \frac{P_s}{A_s} \\ \text{ひずみ} : \gamma &= \frac{\Delta}{c} = \tan \phi \end{aligned}$$

図 1・11 せん断変形(ずれ)部の拡大説明図

応力とひずみ(1)

1.2.1 垂直応力と縦ひずみ

図 1.1 に示すように断面積が A , 長さが l_0 の棒が荷重 P を受けるとき

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.3)$$

を横断面に生じる垂直応力 (normal stress) といい, このとき棒が λ だけ伸び, 伸びた後の棒の長さを l とすると

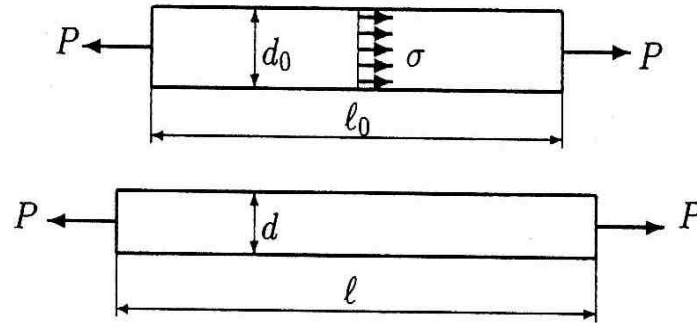


図 1.1 引張荷重を受ける棒

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\lambda}{l_0} \quad (1.4)$$

を縦ひずみ (longitudinal strain) という. また, このとき横方向の寸法が d_0 から d に変化したとすると

$$\epsilon' = \frac{d - d_0}{d} \quad (1.5)$$

を横ひずみ (lateral strain) といい, 横ひずみと縦ひずみの比の絶対値 ν とその逆数 m すなわち

$$\nu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|, \quad m = \frac{1}{\nu} \quad (1.6)$$

をポアソン比 (Poisson's ratio), およびポアソン数 (Poisson's number) という.

応力とひずみ(2)

1.2.2 せん断応力とせん断ひずみ

図 1.2 に示すように断面積が A 、横寸法が a の板が鉛直荷重 P を受けるとき、荷重 P を横断面の面積 A で除した値 τ をせん断応力 (shearing stress) という。

$$\tau = \frac{P}{A}$$

また、変形によって生じる微小な角変化 γ の正接をせん断ひずみ (shearing strain) という。

$$\tan \gamma \doteq \gamma = \frac{v}{a}$$

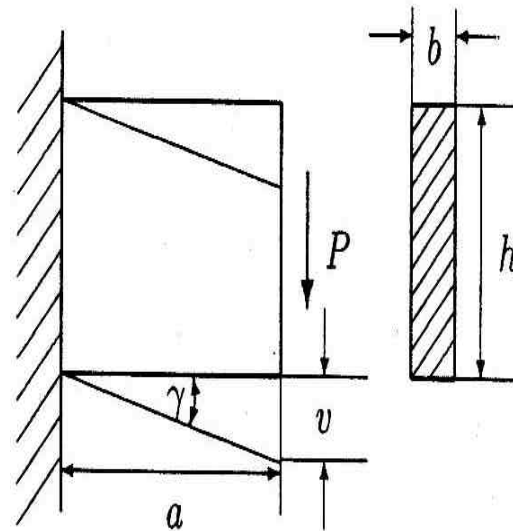


図 1.2 せん断変形

1軸荷重での垂直応力とせん断応力

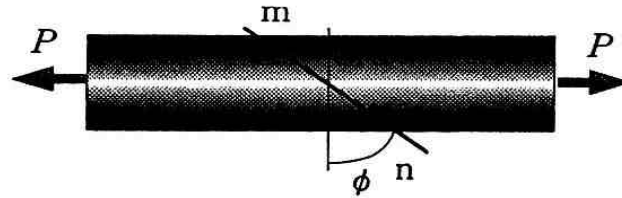


図 2.1 荷重方向と傾いた断面 m-n

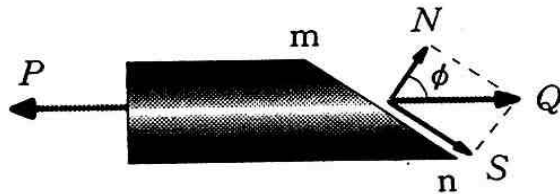


図 2.2 m-n 断面に作用する荷重 N , S

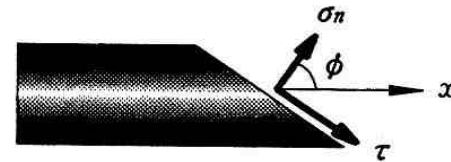


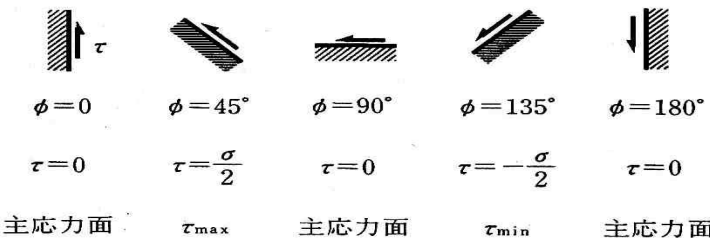
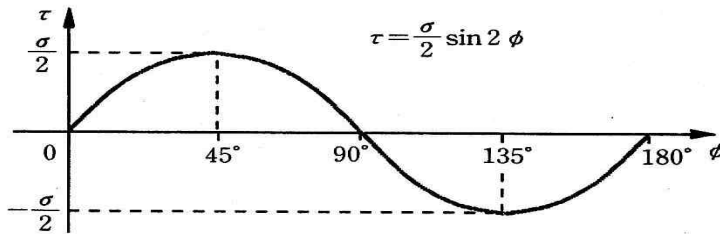
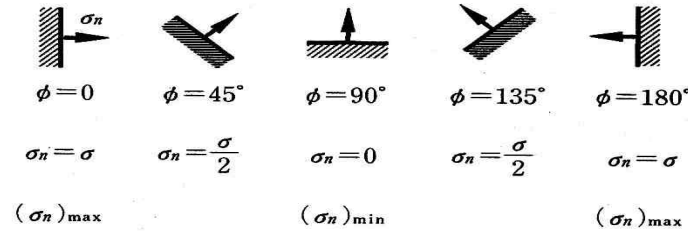
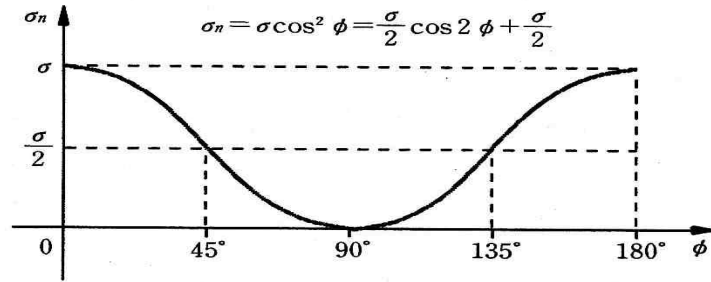
図 2.3 m-n 断面に生じる垂直応力とせん断応力

$$\sigma_n = \frac{N}{A} = \frac{P}{A_o} \cos^2 \phi \quad (2.1)$$

$$\tau = \frac{S}{A} = \frac{P}{A_o} \sin \phi \cos \phi$$

$$\therefore \tau = \frac{1}{2} \frac{P}{A_o} \sin 2\phi \quad (2.2)$$

応力の角度変化と最大応力



$$(\sigma_n)_{\max} = \frac{P}{A_0} = \sigma$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \frac{P}{A_0} = \frac{\sigma}{2}$$

図 2.4 垂直応力とせん断応力の大きさの変化の様子

2軸応力の例

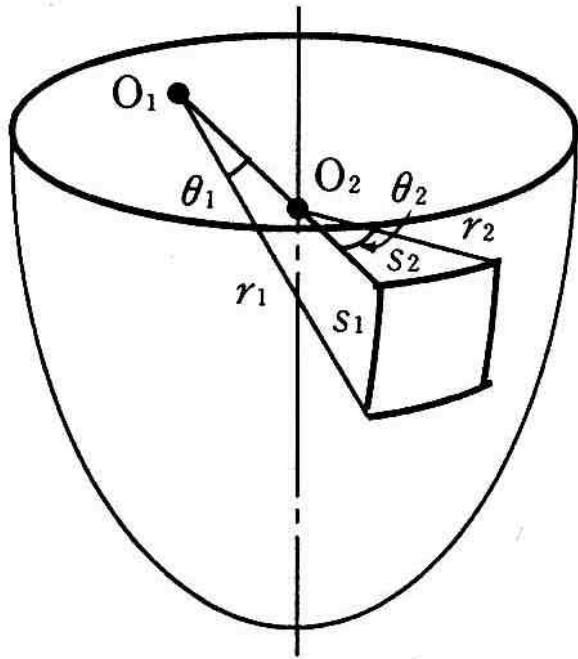


図 5.1 圧力容器に生じる応力

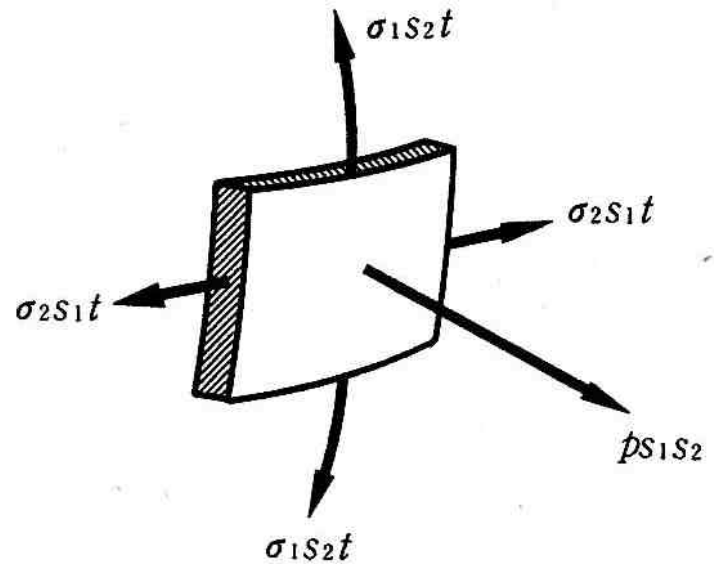


図 5.2 微小部分 $S_1 S_2$ に働く力

2軸応力

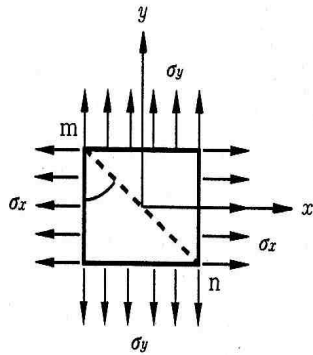


図 5.5

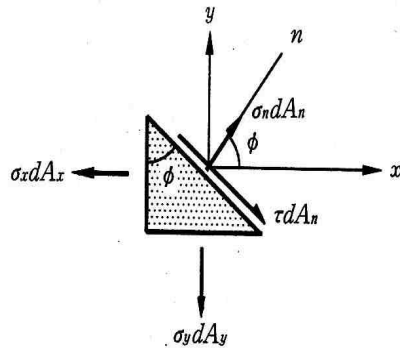


図 5.6

$$dA_x = dA_n \cos \phi, \quad dA_y = dA_n \sin \phi \quad (5.10)$$

表 5.1

力	σ_n 方向成分	τ 方向成分
$\sigma_x dA_x$	$-\sigma_x dA_x \cos \phi$	$-\sigma_x dA_x \sin \phi$
$\sigma_y dA_y$	$-\sigma_y dA_y \sin \phi$	$\sigma_y dA_y \cos \phi$

2軸(σ_x, σ_y)応力から垂直応力とせん断応力

向と τ 方向の成分に分解すると、表 5.1 のようになる。 σ_n 方向の力の和=0 から

$$\sigma_n dA_n - \sigma_x dA_x \cos \phi - \sigma_y dA_y \sin \phi = 0 \quad (5.11)$$

式 (5.10) と式 (5.11) を用いて dA_x, dA_y を消去し

$$\sigma_n dA_n - \sigma_x (dA_n \cos \phi) \cos \phi - \sigma_y (dA_n \sin \phi) \sin \phi = 0$$

$$\therefore \sigma_n = \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \sin^2 \phi \quad (5.12)$$

τ 方向の力の和=0 から

$$\tau dA_n - \sigma_x dA_x \sin \phi + \sigma_y dA_y \cos \phi = 0 \quad (5.13)$$

上式 (5.13) を、式 (5.12) と同じように整理して

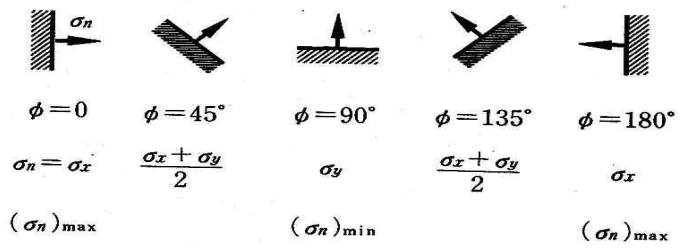
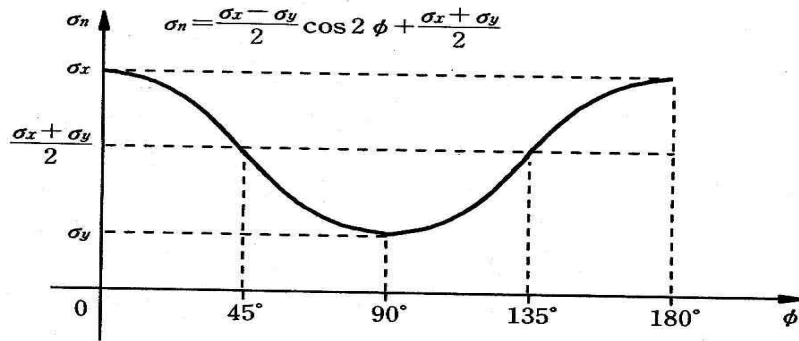
$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \phi \cos \phi \quad (5.14)$$

が得られる。けっきょく、三角関数の公式を利用して、垂直応力 σ_n とせん断応力

τ は式 (5.15), (5.16) のようになる。

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\phi \quad (5.15)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\phi \quad (5.16)$$



$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\phi$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\phi$$

の角度変化

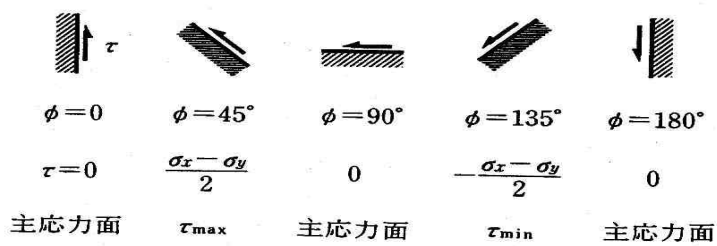
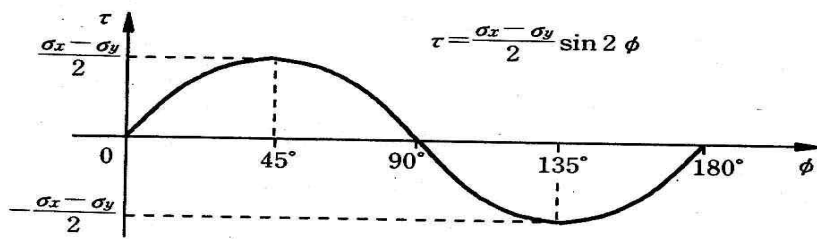


図 5.7 σ_n と τ の変化の様子

垂直応力の最大、最小

次に、垂直応力 σ_n とせん断応力 τ の変化の様子を調べてみよう。三角関数の性質から $-1 \leq \cos 2\phi \leq 1$ であるので、垂直応力 σ_n の最大は

$$\cos 2\phi = 1 \quad (\phi = 0) \quad (5.17)$$

のとき生じ、最大値は

$$(\sigma_n)_{\max} = \sigma_x \quad (5.18)$$

となる。最小は

$$\cos 2\phi = -1 \quad \left(\phi = \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.19)$$

のときで、最小値は

$$(\sigma_n)_{\min} = \sigma_y \quad (5.20)$$

となる。

せん断応力の最大、最小

σ が最大値をとるとき ($\phi=0$ のとき), 式 (5.15) において $\sin 0=0$ であるから, このとき, せん断応力 τ は 0 となる. 最小のとき ($\phi=\pi/2$) も同様である. せん断応力 $\tau=0$ となって消滅する面を主平面 (principal planes) といい, このときの垂直応力を主応力 (principal stress) という. 主応力を σ_1, σ_2 とおくと

$$\sigma_1=(\sigma_n)_{\max}, \quad \sigma_2=(\sigma_n)_{\min} \quad (5.21)$$

となる. ただし, $\sigma_x > \sigma_y$ とする.

一方, せん断応力は $\sin 2\phi=1$ のとき最大で, このとき

$$2\phi=\frac{\pi}{2} \quad \left(\phi=\frac{\pi}{4}\right) \quad (5.22)$$

であり, 最大せん断応力 τ_{\max} は

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \quad (5.23)$$

最小値は $\sin 2\phi=-1$ のとき

$$\tau_{\min}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \quad (5.24)$$

となる.

モールの円 (垂直応力、x軸 とせん断応力、y軸)

5.3 モールの応力円

垂直応力とせん断応力は式 (5.15), (5.16) のように求められた。これらの式は (5.27) のように置き換え、横軸に σ_n , 縦軸に τ をとると円の方程式を表していることがわかる。

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\phi \quad (5.25)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\phi \quad (5.26)$$

$$R = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \quad A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (5.27)$$

とおき、式 (5.25), (5.26) に代入して

$$\sigma_n = A + R \cos 2\phi, \quad \tau = R \sin 2\phi$$

さらに

$$\sigma_n - A = R \cos 2\phi, \quad \tau = R \sin 2\phi$$

両辺を2乗して和をとると

$$(\sigma_n - A)^2 + \tau^2 = R^2 \sin^2 2\phi + R^2 \cos^2 2\phi$$

$\sin^2 2\phi + \cos^2 2\phi = 1$ から

$$(\sigma_n - A)^2 + \tau^2 = R^2 \quad (5.28)$$

となり、式 (5.28) は円の方程式であることがわかる。

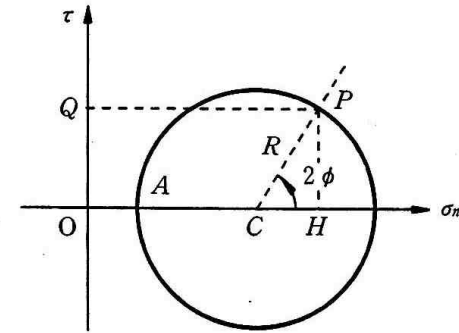


図5.8 モールの応力円

一般の2軸 (面にせん断応力も作用)

せん断応力は第2章の結果から

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}| \quad (8.6)$$

である。垂直応力 σ_n と、せん断応力 τ を計算するために考える断面は m-n であり、力のつり合いは、m-n 断面と垂直方向 (σ_n 方向) と平行な方向 (τ 方向) の成分をとって考える。また、 x 軸と垂直な断面の面積を dA_x 、 y 軸と垂直な断面の面積を dA_y 、m-n 断面の面積を dA_n とする。

$$dA_x = dA_n \cos \phi, \quad dA_y = dA_n \sin \phi \quad (8.7)$$

微小要素に作用している力は

$$\sigma_n dA_n, \quad \tau dA_n, \quad \sigma_x dA_x, \quad \sigma_y dA_y, \quad \tau_{xy} dA_x, \quad \tau_{yx} dA_y$$

であり、これらを σ_n 方向、 τ 方向の成分に分解すると表 8.1 のようになる。

表 8.1 各力の σ_n 方向成分と τ 方向成分

力	σ_n 方向成分	τ 方向成分
$\sigma_n dA_n$	$\sigma_n dA_n$	—
τdA_n	—	τdA_n
$\sigma_x dA_x$	$-\sigma_x dA_x \cos \phi$	$-\sigma_x dA_x \sin \phi$
$\sigma_y dA_y$	$-\sigma_y dA_y \sin \phi$	$\sigma_y dA_y \cos \phi$
$\tau_{xy} dA_x$	$\tau_{xy} dA_x \sin \phi$	$-\tau_{xy} dA_x \cos \phi$
$\tau_{yx} dA_y$	$\tau_{yx} dA_y \cos \phi$	$\tau_{yx} dA_y \sin \phi$

力のつり合い、および σ_n 方向成分の力の和=0 から

$$\sigma_n dA_n - \sigma_x dA_x \cos \phi - \sigma_y dA_y \sin \phi + \tau_{xy} dA_x \sin \phi + \tau_{yx} dA_y \cos \phi = 0 \quad (8.8)$$

となる。

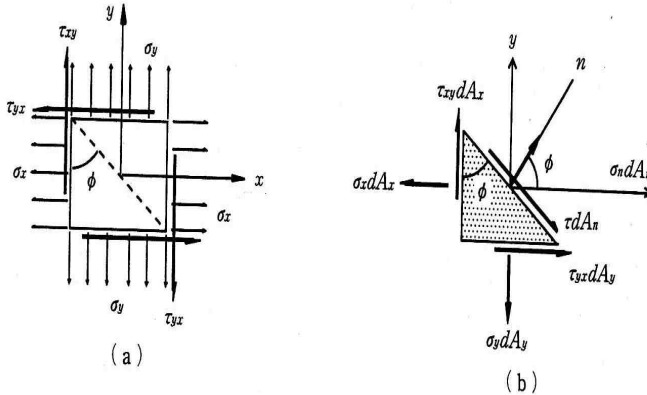


図 8.3

垂直応力とせん断応力

式 (8.6) を用いて τ_{yx} を, また, 式 (8.7) を用いて dA_x , dA_y を消去して

$$\begin{aligned} \sigma_n dA_n - \sigma_x (dA_n \cos \phi) \cos \phi - \sigma_y (dA_n \sin \phi) \sin \phi \\ + \tau_{xy} (dA_n \cos \phi) \sin \phi + \tau_{xy} (dA_n \sin \phi) \cos \phi = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_n = \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \sin^2 \phi - 2\tau_{xy} \cos \phi \sin \phi \quad (8.9)$$

一方, τ 方向成分の力の和=0 から

$$\tau dA_n - \sigma_x dA_x \sin \phi + \sigma_y dA_y \cos \phi - \tau_{xy} dA_x \cos \phi + \tau_{yx} dA_y \sin \phi = 0 \quad (8.10)$$

であり, 式 (8.10) を式 (8.8) と同じように整理して

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \phi \cos \phi + \tau_{xy} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \quad (8.11)$$

が得られる。けっきょく, 垂直応力 σ_n とせん断応力 τ は, 整理して

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\phi - \tau_{xy} \sin 2\phi \quad (8.12)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi \quad (8.13)$$

となる。

垂直応力の最大、最小

$$(\sigma_n)_{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (8.21)$$

となる。

σ_n が最大値をとるとき ($\phi = -\alpha$ のとき), 式 (8.16) において

$$\sin(2\phi + 2\alpha) = 0$$

であるから

$$\tau = 0 \quad (8.22)$$

である。

σ_n が最小のとき ($\phi = \pi/2 - \alpha$) も同様である。せん断応力 $\tau = 0$ となって消滅する面を**主平面** (principal planes) といい, このときの垂直応力を**主応力** (principal stress) という。主応力 σ_1 , σ_2 とおくと

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= (\sigma_n)_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= (\sigma_n)_{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

となる。

せん断応力の最大、最小

一方、せん断応力は $\sin(2\phi+2\alpha)=1$ のとき最大で、このとき

$$2\phi+2\alpha=\frac{\pi}{2} \quad \therefore \phi=\frac{\pi}{4}-\alpha \quad (8.24)$$

であり、最大せん断応力 τ_{\max} は

$$\tau_{\max}=\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{4}+\tau_{xy}^2} \quad (8.25)$$

最小値は、 $\sin(2\phi+2\alpha)=-1$ のとき、すなわち

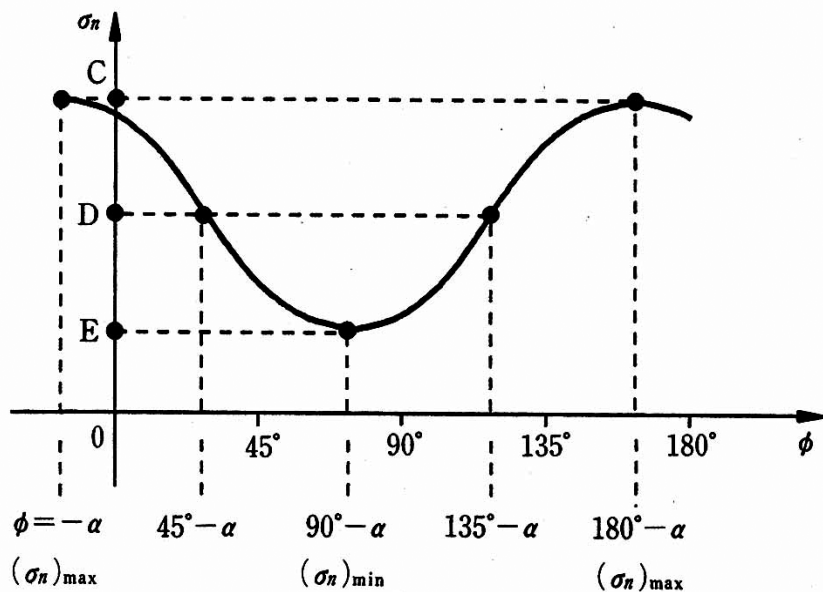
$$2\phi+2\alpha=\frac{3\pi}{2} \quad \therefore \phi=\frac{3\pi}{4}-\alpha$$

のとき

$$\tau_{\min}=-\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{4}+\tau_{xy}^2} \quad (8.26)$$

となる。

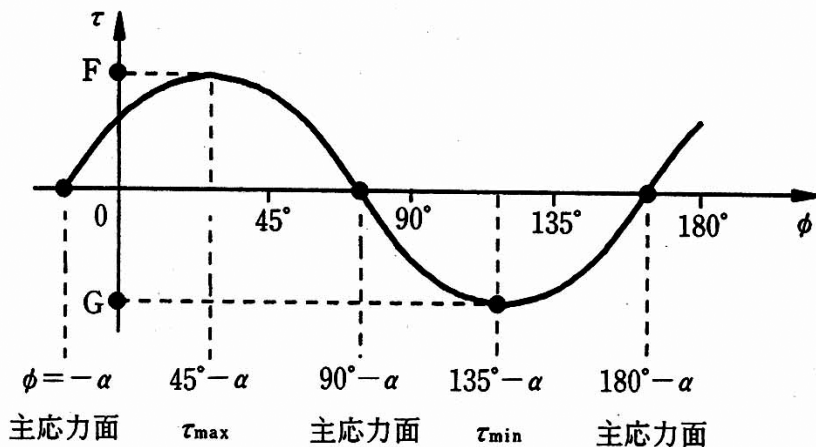
垂直応力とせん断応力の角度変化



$$C : \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad D : \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$E : \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

$$F : \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad G : -\sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$



ひずみゲージ

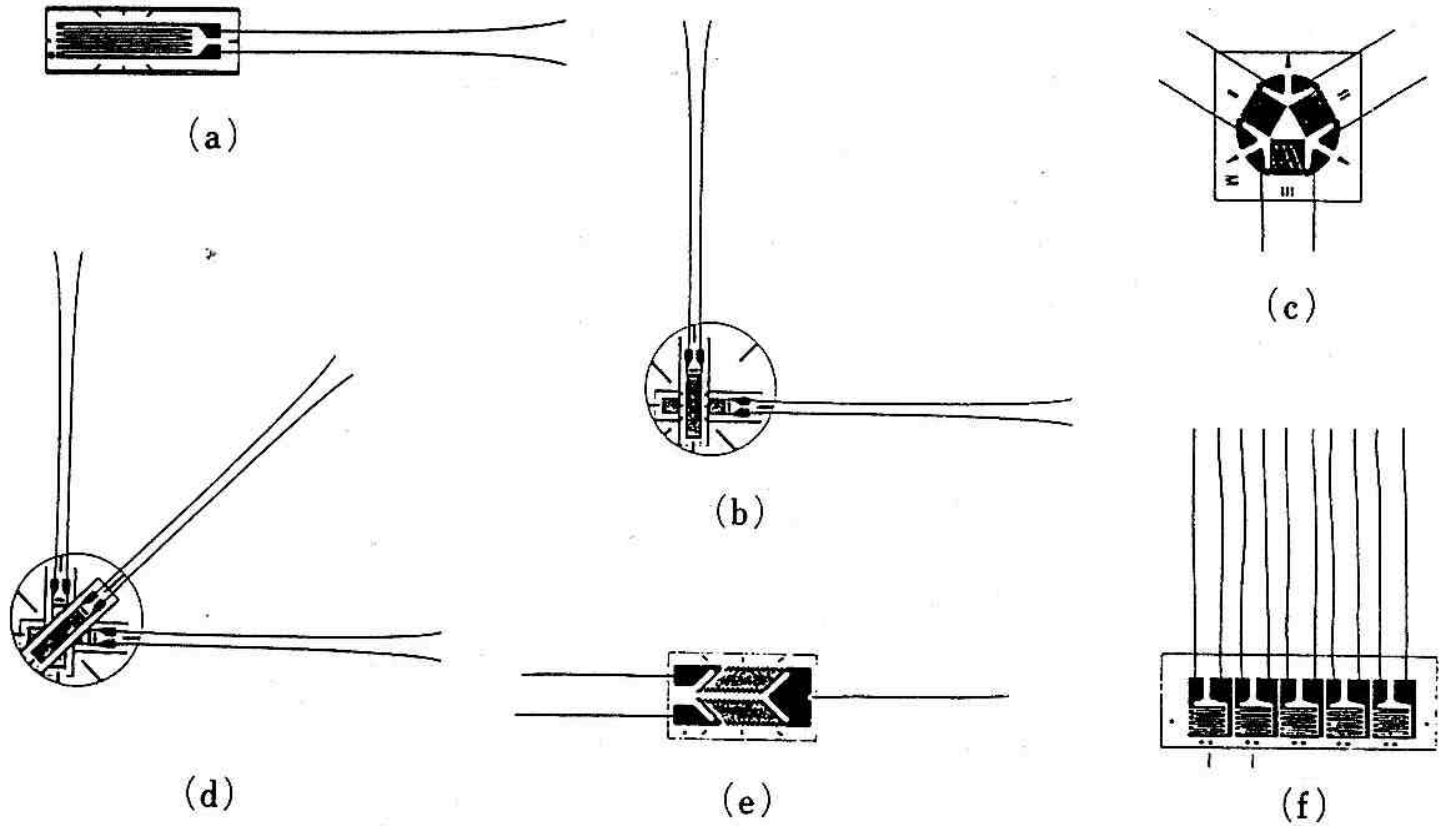


図 7.9 ひずみゲージ

3方向ひずみ測定ゲージ (3軸ゲージ)

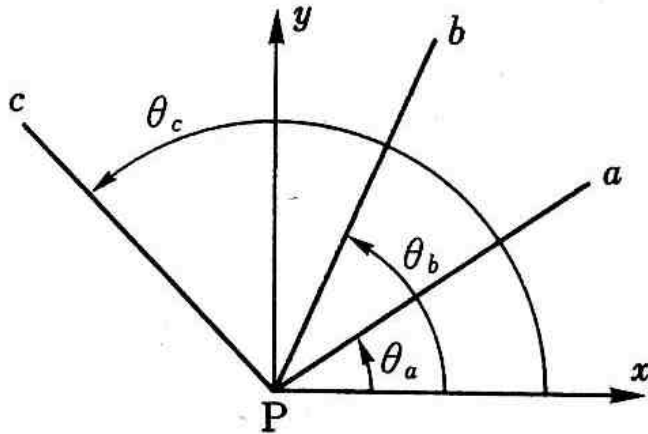


図 7.10 ひずみ状態の計測

$$\begin{aligned}\epsilon_a &= \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\theta_a + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\theta_a \\ \epsilon_b &= \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\theta_b + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\theta_b \\ \epsilon_c &= \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\theta_c + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\theta_c\end{aligned}\quad (7.21)$$

ロゼットゲージ

【例題 7.5】 ひずみ計測において、よく使われるロゼットゲージは図 7.9 (d)に示すように各ゲージが 45° をなしている。せん断ひずみ、主ひずみおよび主方向を求めよ。

(解) $\theta_a=0^\circ$, $\theta_b=45^\circ$, $\theta_c=90^\circ$ を式 (7.21) に代入して、 ε_x , ε_y , γ_{xy} について解くと、

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_c, \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c \quad (7.24)$$

これらを式 (7.22), (7.23) に代入して、

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \left\{ \left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} \right)^2 + \left(\varepsilon_b - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (7.25)$$

$$\tan 2\theta_n = \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} \quad (7.26)$$

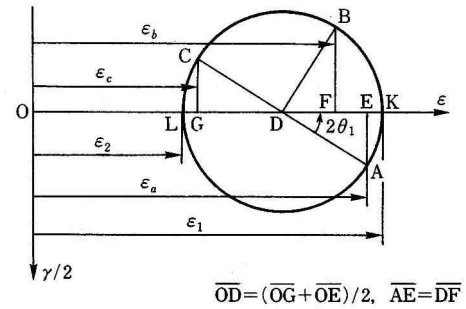


図 7.11 応力状態