

平成 20 年度
学士学位論文

高校数学の二次関数を対象とした
作問学習支援システムの構築

Development of Problem Posing Learning Support
System in Quadratic Function in High School
Mathematics

1090359 西川貴仁

指導教員 妻鳥貴彦

2009 年 3 月 5 日

高知工科大学 情報システム工学科

要 旨

高校数学の二次関数を対象とした作問学習支援システムの構築

西川貴仁

学習者の知識を定着させる学習方法の1つに作問学習がある。作問学習とは、学習者が自らの知識を活用して問題を作成する学習のことである。学習者自身が問題を作成することで既習内容を再検討でき、理解不足の部分の発見や問題解決能力を向上させることができる。また、作問学習を行うことで、学習者に自身が問題に関与してよいことに気付かせることができ、学習者の学習に対する態度の改善や意欲の向上といった効果が期待できる。しかし、作問学習では、作成した問題が問題として成立しているか、作成した問題に対する解答は正しいか判断しなくてはならない。これらの判断は、学校の授業であれば教師といった、その問題に対して確かな知識を持つ者でなければ行うことができない。従って、生徒が作問学習を行う場合は教師などが必要であり、生徒が自主学習として作問学習を行うことは困難である。

本研究では、作問学習を自主学習に採り入れ易くすることを目的とし、作問学習支援システムを構築する。作問学習の支援として、学習者が作成した問題の成立・不成立の判断及び、問題に対する学習者の解答の正誤判断をシステムが行う。今回は支援する作問学習の対象として高校数学の二次関数を取り上げる。二次関数の各問題に対する作問学習の支援として、グラフの表示、計算過程の表示、表の表示を問題に応じて行う。本システムの有効性を確認するため、まず、高校の数学教員に本システムを使ってもらい意見を頂いた。次に、頂いた意見をもとに改良したシステムを高校生に使ってもらい評価してもらった。評価の結果、本システムが自主学習での作問学習を支援するシステムとして有効であることが分かった。

キーワード 作問学習，自主学習，二次関数

Abstract

Development of Problem Posing Learning Support System in Quadratic Function in High School Mathematics

Takahito NISHIGAWA

Problem posing learning is one of effective study methods to the acquirement of knowledge. Problem posing learning is the study that a student makes problem. By making problem, the learner can confirm the studied content, discover the part of understanding shortage and improve the problem-solving ability. Additionally, problem posing learning has effect to improvement of learner's study attitude and learning willingness. However, it is difficult for the learner to study with the self-directed learning. Because, problem posing learning must determine about validity of the problem and the answer.

In this study, we developed the problem posing learning support system in quadratic function in high school mathematics. The system determines validity of the problem and validity of the answer automatically. Moreover, we evaluated the system by high school students. As a result, we confirmed that the system is effective as the system supporting the problem posing learning in self-directed learning.

key words Problem posing learning, Voluntary learning, Quadratic function

目次

第 1 章	はじめに	1
第 2 章	研究の背景と目的	2
2.1	作問学習	2
2.1.1	作問学習の利点	3
2.1.2	作問学習の問題点	3
2.2	研究の目的	4
第 3 章	二次関数の問題を対象とした作問学習の支援	5
3.1	対象とする二次関数の問題	5
3.2	二次関数の作問学習の支援	6
3.2.1	問題を作成する段階の支援	6
3.2.2	問題に解答する段階の支援	6
3.2.3	正答入力後の支援	7
第 4 章	システムの設計	8
4.1	問題の入力	8
4.2	問題の診断	10
4.3	解答の入力	11
4.4	ヒントの作成	12
4.5	解答の診断	13
4.6	支援ツール	13
4.6.1	グラフの表示	14
4.6.2	計算過程の表示	14
4.6.3	表の表示	15

目次

第 5 章	システムの実装	16
5.1	システムの概要	16
5.2	システムの画面	16
第 6 章	システムの評価	22
6.1	評価前の調査	22
6.2	評価の目的	23
6.3	評価の手法	23
6.4	評価項目	23
6.4.1	各問題の支援方法に対する評価	23
6.4.2	システム全体に対する評価	24
6.5	評価結果	25
6.5.1	各問題の支援方法に対する評価	25
6.5.2	システム全体に対する評価	28
6.5.3	意見・感想	29
6.6	評価結果の考察	30
第 7 章	おわりに	32
	謝辞	33
	参考文献	34

目次

4.1 システムを用いた作問学習の流れ	9
5.1 作成する問題の選択	17
5.2 問題の入力 (数値の入力)	17
5.3 問題の入力 (グラフを用いた入力)	18
5.4 問題の表示	19
5.5 問題が成立したときのメッセージ	19
5.6 問題が不成立であったときのメッセージ	19
5.7 解き方のヒント	20
5.8 解答が正答であったときのメッセージ	20
5.9 作成した問題の関連事項の解説	21
5.10 解答が誤答であったときのメッセージ	21

表目次

3.1 各問題に対する支援	7
6.1 評価項目 (a) の結果	25
6.2 評価項目 (b) の結果	26
6.3 評価項目 (c) の結果	26
6.4 評価項目 (d) の結果	27
6.5 評価項目 (e) の結果	27
6.6 評価項目 (f) の結果	28

第 1 章

はじめに

学習者の知識を定着させる学習方法の 1 つに、学習者が問題を作成する作問学習がある。問題を作成することは問題を解くこと以上に、その問題に対する深い理解を問題の作成者が持つことが必要である。作問学習が持つ高い学習効果は広く認められており、学校の授業でも行われることがある。作問学習では、学習者が作成した問題が問題として成立しているか判断する必要がある。また、作成した問題に対する学習者の解答を正誤判断する必要がある。これらは、学校の授業であれば教師といった、作成する問題に対して確かな知識を持つ者でなければ行うことができない。従って、生徒が作問学習を行う場合は教師などが必要であり、生徒が自主学習として作問学習を行うことは困難である。

本研究では、作問学習を自主学習に採り入れ易くすることを目的とし、作問学習支援システムを構築する。作問学習の支援として、システムは問題の成立・不成立を自動で判断する。また、学習者が作成した問題の正答をシステム側で用意して、学習者の解答の正誤判断も行う。作問学習の対象として本研究では、高校数学の二次関数を取り上げる。取り上げた二次関数の問題は大きく分けて、平方完成をする問題、頂点の座標を求める問題、最大値・最小値を求める問題、グラフと x の共有点の座標を求める問題、グラフの平行移動に関する問題、二次関数の決定に関する問題の 6 種類である。二次関数の作問学習の支援として各問題に応じて、グラフの表示、計算過程の表示、表の表示を行う。本研究で構築したシステムについて、評価を行う前に高校の数学教員に使ってもらい意見を頂いた。その意見をもとにシステムの改良を行った。改良後のシステムを高校生に使ってもらい、アンケートによる評価を行ってもらった。

第 2 章

研究の背景と目的

2.1 作問学習

作問学習は学習者の知識の定着に有効な学習方法の 1 つである。作問学習とは、学習者が自らの知識を活用して問題を作成することによる学習方法である。作問学習では、まず、作成する問題の種類を決めて問題を作成した後、問題が問題として成立しているか判断する。次に、作成した問題に解答し、解答の正誤判断を行う。作問学習は、自ら問題を考え自らの力で解くことが重要である数学の学習方法として適しており [1]、実際に数学の授業で作問学習が行われることがある [2][3]。

数学の授業で作問学習を行う場合、生徒の理解を促したい問題の作問学習を行うために、作成する問題の種類を教師が指示する。生徒は教師が指示した中から問題の種類を選び問題を作成する。そして問題を作成した生徒は、その問題が問題として成立しているか判断する。しかし、生徒の判断が誤りである可能性があるため、最終的には教師が判断する。この判断は、問題を作成した生徒を巡って授業中に行う場合と、生徒が作成した問題を回収して授業終了後に行う場合がある。また、これら両方の場合もある。生徒は、問題が成立していると判断した場合その問題に対して解答するが、問題が不成立であると判断した場合は問題の作成をやり直す。生徒が解答を終えると、教師は、生徒が作成した問題の成立・不成立の判断と作成した問題に対する生徒の解答の正誤判断を行う。このとき、問題が不成立であった場合や解答が誤答であった場合、その原因を調べ生徒の指導を行う。

2.1 作問学習

2.1.1 作問学習の利点

作問学習を行うことで以下の学習効果が得られる [4] .

- 学習者にとって理解不足であった部分の発見 .
- 学習者の問題解決能力の向上 .
- 学習者の学習態度の改善 .
- 学習者の学習意欲の向上 .

問題を作成することは問題を解くこと以上に、その問題に対する深い理解が問題の作成者には求められ、学習者自身が問題を作成することで理解不足の部分に気付くことができる . また、学習者は問題を作成する過程で既習内容を再検討でき、問題解決能力と呼ばれる、自らの力で考えて問題を解く能力を向上させることができる . さらに、学習者が問題の作成を行うことで、学習者に自身が問題に関与してよいことに気付かせることができ、学習者の学習態度の改善や学習意欲の向上に繋がる .

実際に作問学習を行いその効果を調査した“単文統合による作問を対象とした学習支援システムの長期利用とその効果”[5] では、問題解決能力の向上が確認された . また、仙台市立蒲町中学校 [2] の例では、作問学習を行った生徒から「こういう課題をまたやってみたい」といった意見が寄せられ、学習意欲の向上がみられた .

2.1.2 作問学習の問題点

作問学習は学習効果が高い反面、自主学習として採り入れる場合に以下の 2 点が問題となる .

- 学習者が作成した問題が問題として成立しているとは限らない .
- 教科書や問題集の問題を解く問題解決学習とは異なり、作問学習では作成した問題に対する正答があらかじめ用意されていない .

2.2 研究の目的

授業での作問学習ならば、教師が生徒が作成した問題の成立・不成立の判断と、作成した問題に対する生徒の解答の正誤判断を行うことでこの問題を解決する。一方自主学習では教師などはいないため、これらの判断を学習者が行わなければならない。作成した問題の成立・不成立の判断は、学習者にその問題に対する十分な理解があれば可能である。しかし、学習者が問題の成立・不成立を判断することは困難である。さらに、教科書や問題集とは異なり作成した問題に対する正答は用意されていないため、学習者自身が解答の正誤判断を行うことは困難である。

2.2 研究の目的

本研究では、作問学習を自主学習に採り入れ易くすることを目的とし、作問学習支援システムの構築を行う。今回は作問学習の対象として、高校数学において理解不足の生徒が多い二次関数 [6] を扱う。作問学習を自主学習に採り入れ易くするためには、2.1.2 節で述べた問題点を解決する支援が必要である。この支援として、学習者が作成した問題の成立・不成立をシステムが判断する。また、学習者が作成した問題の正答をシステム側で用意して、学習者の解答の正誤判断も行う。

第 3 章

二次関数の問題を対象とした作問学習の支援

3.1 対象とする二次関数の問題

今回作成できる問題は、以下の 6 種類の問題とする。また、問題によっては更に幾つかの問題のパターンに分かれている。

- 平方完成をする問題
- 頂点の座標を求める問題
- 最大値・最小値を求める問題
 - x の定義域がない場合
 - x の定義域がある場合
- グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題
- グラフの平行移動に関する問題
 - 一次と零時の係数を変化させる場合
 - x 軸方向と y 軸方向の移動の数値が分かっている場合
- 二次関数の決定に関する問題
 - 頂点の座標と、頂点以外の座標から二次関数を決定する場合
 - 異なる 2 点の座標と、 x 軸の方程式から二次関数を決定する場合
 - 異なる 3 点の座標から二次関数を決定する場合

3.2 二次関数の作問学習の支援

作問学習では、まず、作成する問題の種類を決めて問題を作成した後、問題が問題として成立しているか判断する。次に、作成した問題に解答し、解答の正誤判断を行う。前者は問題を作成する段階、後者は問題に解答する段階に分けられる。自主学习で作問学習を行えるようにするためには、この二つの段階それぞれに対して支援が必要である。また、作成した問題に学習者が正答した後、その問題に対するより深い理解を学習者に促す支援が必要である。

以上の作問学習の支援をもとに、二次関数の問題を対象とした作問学習の適切な支援を検討する。また、その結果を表 3.1 に示す。

3.2.1 問題を作成する段階の支援

問題を作成する段階では、システムが問題の診断として、学習者が作成した問題が問題として成立しているか判断する。問題が成立した場合は、その旨を学習者に通知する。問題が不成立であった場合は、その原因を学習者に通知して修正を求める。これにより学習者が問題の成立・不成立を判断する必要がなくなるため、自主学习に作問学習を採り入れ易くなると考えられる。また、作成する問題に応じてグラフを用いた入力を行う。グラフを用いた入力は、問題の作成を直感的に行える他、問題の理解に役立つと考えられる。

3.2.2 問題に解答する段階の支援

問題に解答する段階では、システムが解答の診断として、作成した問題に対する学習者の解答の正誤判断を行う。解答が正答であった場合は、その旨を学習者に通知する。解答が誤答であった場合は、誤答であることを通知し修正を求める。これにより学習者が自身の解答の正誤判断を行う必要がなくなるため、自主学习に作問学習を採り入れ易くなると考えられる。また、作成した問題を学習者が解けない場合が考えられるため、その問題に対する解き方のヒントを学習者に提示する。解き方のヒントとして、計算過程を表示する他、二次関数

3.2 二次関数の作問学習の支援

の問題であることを考慮し，問題によってはグラフの表示も行う．

3.2.3 正答入力後の支援

作成した問題に対して学習者が解答を入力し正解した場合，その問題に対するより深い理解を促すために，問題の関連事項の解説を行う．関連事項の解説では，文章による解説だけでは学習者にとって分かり難くなる場合があると考え，問題に応じて関連事項のまとめに表を用いる．また，二次関数の問題であることを考慮し，問題によっては解説にグラフを用いる．

表 3.1 各問題に対する支援

問題の種類	問題を作成する段階の支援	問題に解答する段階の支援	正答入力後の支援
平方完成をする問題	問題の診断	解答の診断 計算過程の表示	作成した問題の関連事項を表を用いて解説
頂点の座標を求める問題	問題の診断	解答の診断 計算過程とグラフを表示	作成した問題の関連事項を表を用いて解説
最大値・最小値を求める問題	問題の診断	解答の診断 計算過程とグラフを表示	作成した問題の関連事項をグラフと表を用いて解説
グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題	問題の診断	解答の診断 計算過程とグラフを表示	作成した問題の関連事項をグラフを用いて解説
グラフの平行移動に関する問題	グラフを用いた入力 問題の診断	解答の診断 計算過程とグラフを表示	作成した問題の関連事項を表を用いて解説
二次関数の決定に関する問題	グラフを用いた入力 問題の診断	解答の診断 計算過程の表示	作成した問題の関連事項を表を用いて解説

第 4 章

システムの設計

システムによる作問学習の流れは以下の通りとする．また，作問学習のフローを図 4.1 に示す．

1. 学習者は作成したい問題を選択し，その問題の作成に必要な数値などを入力する．
2. システムは学習者が作成した問題を診断する．
 - 問題が不成立であれば学習者に修正を求める．
 - 問題が成立していれば画面上に問題を表示する．
3. 学習者は問題が表示されると，解答の入力を行う．このとき学習者が解き方のヒントを要求した場合，システムはヒントを作成し表示する．
4. システムは解答が入力されると，解答の正誤判断を行う．
 - 解答が誤答であれば学習者に修正を求める．
 - 解答が正答であれば問題の関連事項の解説を表示する．

4.1 節からは，二次関数の作問学習の支援を行うために必要な機能について述べる．

4.1 問題の入力

問題の入力では，作成する問題の選択，選択した問題を作成するために必要な情報や数値の入力を行う．この内，二次関数の各係数の数値については，整数での入力と分数での入力を学習者が任意に切り替えて入力する．また，問題に応じてグラフを用いた入力を行う．

学習者は作成する問題に応じて以下の入力を行う．

4.1 問題の入力

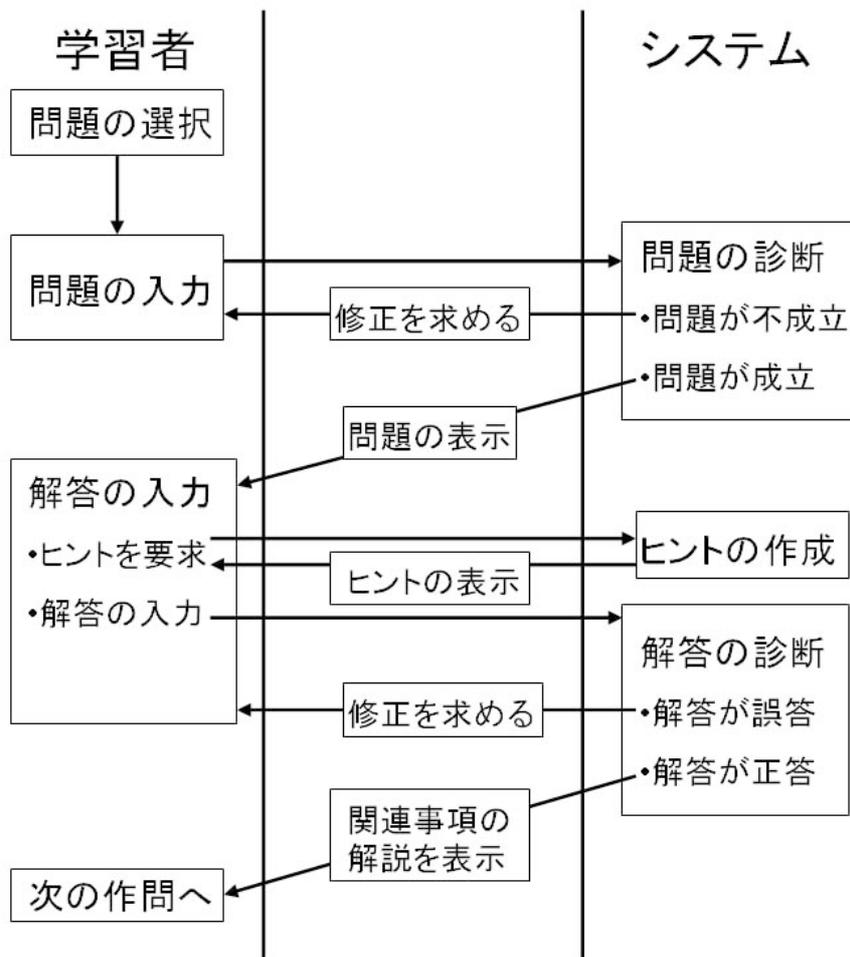


図 4.1 システムを用いた作問学習の流れ

- 二次関数の各係数の数値を入力する。

平方完成をする問題，頂点の座標を求める問題，最大値・最小値を求める問題，グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題，グラフの平行移動に関する問題を作成する場合に行う。

- 定義域の形を決める不等号の組み合わせを選択する。

最大値・最小値を求める問題において， x の定義域が存在する問題を作成する場合に行う。

- x 軸方向と y 軸方向に対して平行移動する数値を入力する。

グラフの平行移動に関する問題において，平行移動前の式と， x 軸方向と y 軸方向に対

4.2 問題の診断

して平行移動する数値を入力して問題を作成する場合に行う。

- 座標を入力する。

二次関数の決定に関する問題を作成する場合に行う。

- x 軸の方程式の数値を入力する。

二次関数の決定に関する問題において、異なる 2 点の座標と x 軸の方程式から二次関数を決定する問題を作成する場合に行う。

- マウスでグラフを操作して数値を入力する。

グラフの平行移動に関する問題、二次関数の決定に関する問題を作成する場合に行う。

4.2 問題の診断

問題の診断では、学習者が作成した問題が問題として成立しているか、不成立であるかを判断する。問題が成立した場合、学習者に問題が成立したことを知らせるメッセージの表示及び、学習者が作成した問題の表示を行う。問題が不成立であった場合、問題が不成立であることとその原因を知らせ修正を求めるメッセージの表示を行う。このとき、問題の表示は行わない。

問題の診断として、学習者が作成した問題に応じて以下の内容を調査する。

- 入力された二次の係数の数値が 0 でないか、各係数の分母の値が 0 でないか。

平方完成をする問題、頂点の座標を求める問題、最大値・最小値を求める問題、グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題、グラフの平行移動に関する問題を作成する場合に行う。

- x の定義域の両端の数値が、等しいまたは大小関係が逆転していないか。

最大値・最小値を求める問題において、 x の定義域が存在する問題を作成する場合に行う。

- 平行移動前の式と平行移動後の式が同じでないか。

グラフの平行移動に関する問題において、平行移動前の式と平行移動後の式を入力して

4.3 解答の入力

問題を作成する場合に行う．

- x 軸方向と y 軸方向に対する平行移動の数値が両方とも 0 でないか．

グラフの平行移動に関する問題において，平行移動前の式と， x 軸方向と y 軸方向に対して平行移動する数値を入力して問題を作成する場合に行う．

- 2 点の座標の x 座標と y 座標が両方または一方が同じでないか．

二次関数の決定に関する問題において，頂点の座標と頂点以外の座標から二次関数を決定する問題，異なる 2 点の座標と x 軸の方程式から二次関数を決定する問題を作成する場合に行う．

- 3 点の座標の x 座標と y 座標が全てまたはいずれかが同じでないか．

二次関数の決定に関する問題において，異なる 3 点の座標から二次関数を決定する問題を作成する場合に行う．

- x 軸の方程式の数値が 2 点の x 座標の数値を平均した数値と同じでないか．

二次関数の決定に関する問題において，異なる 2 点の座標から二次関数を決定する問題を作成する場合に行う．

- 3 点の座標が直線上に並んでいないか．

二次関数の決定に関する問題において，異なる 3 点の座標から二次関数を決定する問題を作成する場合に行う．

4.3 解答の入力

解答の入力では，数値の入力を整数と分数の形を学習者が任意に切り替えて行うことができる．また，問題によっては数値以外の入力を行う場合がある．

学習者は解答の入力として，作成した問題に応じて以下の入力を行う．

- $y = a(x - p)^2 + q$ の a, p, q の数値を入力する．

平方完成をする問題に対する解答として行う．また，二次関数の決定に関する問題において，頂点の座標と頂点以外の座標から二次関数を決定する問題と，異なる 2 点の座標と

4.4 ヒントの作成

x 軸の方程式から二次関数を決定する問題に対する解答として行う。

- 頂点の座標 (P, Q) の P, Q の数値を入力する。

頂点の座標を求める問題に対する解答として行う。

- 最大値や最小値の有無の選択及び、最大値や最小値とそのときの x の数値を入力する。

最大値・最小値を求める問題に対する解答として行う。

- 共有点の数の選択及び、選択した共有点の数だけその座標を入力する。

グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題に対する解答として行う。

- x 軸方向と y 軸方向に対して平行移動した数値を入力する。

グラフの平行移動に関する問題において、平行移動前の式と平行移動後の式から平行移動した数値を求める問題に対する解答として行う。

- $y = a(x - p)^2 + q$ の p と q の数値の入力を行う。

グラフの平行移動に関する問題において、平行移動前の式と、 x 軸方向と y 軸方向に対して平行移動する数値から平行移動後の式を求める問題に対する解答として行う。

- $y = ax^2 + bx + c$ の a, b, c の数値の入力を行う。

二次関数の決定に関する問題において、異なる 3 点の座標から二次関数を決定する問題に対する解答として行う。

4.4 ヒントの作成

問題の解き方のヒントとして、問題に応じて計算過程やグラフの表示を行う。ヒントは学習者の要求に応じて段階的に表示していく。

計算過程で表示する計算式には、問題の作成時に入力された数値を代入して表示する。入力された全ての数値は分子と分母を分けて保持している。表示する計算式内の単項式別に数値を代入して計算する。例えば、 $\frac{a}{b}$ を計算する場合

$$\frac{a \text{ の分子} \times b \text{ の分母}}{a \text{ の分母} \times b \text{ の分子}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

として計算する。このとき、 $\beta = 1$ または $\beta = -1$ となる場合は整数の形に直して表示する。

4.5 解答の診断

また、 $\frac{\alpha}{\beta}$ が係数であり、かつ $\frac{\alpha}{\beta} = 1$ または $\frac{\alpha}{\beta} = -1$ であれば符号を調整したうえで表示を省略する。しかし、 $\frac{\alpha}{\beta} = 0$ の場合はその単項式の表示は省略しない。これは、そこに数値が存在することを学習者に意識させるためである。

グラフは問題に応じて以下の通りに表示する。

- 頂点の座標に点を描画して強調したグラフを表示する。

頂点の座標を求める問題、最大値・最小値を求める問題で表示する。

- x の定義域の範囲内と範囲外の部分を色分けして表示する。

最大値・最小値を求める問題において、 x の定義域が存在する問題の場合に表示する。

- x 軸との共有点の座標に点を描画して強調したグラフを表示する。

グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題で表示する。

- 平行移動前と平行移動後のグラフを色分けして表示する。

グラフの平行移動に関する問題で表示する。

4.5 解答の診断

解答の診断では、学習者が入力した解答とシステム側で計算した結果を照合して解答の正誤判断を行う。学習者の解答とシステム側の計算結果が一致した場合、学習者に解答が正答であることを知らせるメッセージの表示及び、作成した問題の関連事項を表やグラフを用いて解説するページの表示を行う。解答が不成立であった場合、学習者に解答が誤答であることを知らせるメッセージの表示及び、問題の解き方のヒントの参照を勧めるメッセージの表示を行う。

4.6 支援ツール

二次関数の作問学習を行うための支援ツールとして、グラフの表示、計算過程の表示、表の表示を行うツールを作成する。これらを作成する問題に応じて、問題の入力、問題の解き方のヒント、作成した問題の関連事項の解説に用いる。

4.6 支援ツール

4.6.1 グラフの表示

表 3.1 より，グラフの使用方法と問題は以下の通りである．

- 問題の入力
 - － グラフの平行移動に関する問題
 - － 二次関数の決定に関する問題
- 解き方のヒント
 - － 頂点の座標を求める問題
 - － 最大値・最小値を求める問題
 - － グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題
 - － グラフの平行移動に関する問題
- 問題の関連事項の解説
 - － 最大値・最小値を求める問題
 - － グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題

グラフを用いた問題の入力とヒントの表示は，4.1 節と 4.4 節の通りである．

問題の関連事項の解説にグラフを用いる，最大値・最小値を求める問題と，グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題の場合，ヒントとして表示するグラフと同様のグラフを表示する．

4.6.2 計算過程の表示

計算過程の表示は作成できる全ての問題で，問題の解き方のヒントとして表示する．計算過程の解説や手順を学習者にとって分かり易くするために，平方完成をする計算過程は“KIT 数学ナビゲーション”[7]を参考に，それ以外の計算過程は“理解しやすい数学 I”[8]及び“高等学校数学 I/二次関数”[9]を参考に，文章による解説と計算式を組み合わせで表示する．

4.6 支援ツール

4.6.3 表の表示

グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題以外の問題で、作成した問題の関連事項の解説として表を用いる。

- 頂点の座標，最大値・最小値， x 軸の方程式を表示する。
平方完成をする問題，頂点の座標を求める問題， x の定義域が存在しないときの最大値・最小値を求める問題の場合に表示する。
- x の定義域の不等号の組み合わせを変えた場合の最大値・最小値を表示する。
 x の定義域が存在するときの最大値・最小値を求める問題の場合に表示する。
- x 軸， y 軸，原点それぞれに対してグラフが対象移動したときの二次関数の式を表示する。
グラフの平行移動に関する問題の場合に表示する。
- 二次関数を決定する際に用いられる条件と，その条件が提示されたときの考え方を表示する。
二次関数の決定に関する問題の場合に表示する。

第 5 章

システムの実装

5.1 システムの概要

本システムは Apache , PHP , JavaApplet , JavaScript を用いて Web アプリケーションとして構築し , Web ブラウザ上で操作できるようにした . 加えて , ブラウザ上で数式や数学の記号などを教科書に近い形で表示するために MathML を用いた .

サーバ側では PHP を用いて , 学習者に問題や解答を入力してもらう HTML ページの作成 , 問題と解答の診断 , 問題の解き方のヒントの作成 , メッセージの作成 , 問題の関連事項の解説を行うページの作成 , 入力された情報や数値の保持を行う . クライアント側では , JavaApplet を用いてグラフの表示を行う . また , JavaScript を用いて , PHP と JavaApplet 間のデータの引渡しを行う .

5.2 システムの画面

学習者は本システムの図 5.1 に示すウインドウにある問題の中から作成したい問題を選択する .

作成する問題を選択した後 , 問題の作成に必要な情報や数値の入力を行う . 二次関数の各係数は図 5.2 で示すように , 整数での入力と分数での入力を任意に切り替えて入力することができる . また , 図 5.3 に示すように , 問題に応じてグラフを用いた入力を行うことができる .

学習者が問題を作成するとシステムは問題の診断を行う . 診断の結果 , 問題が成立してい

5.2 システムの画面

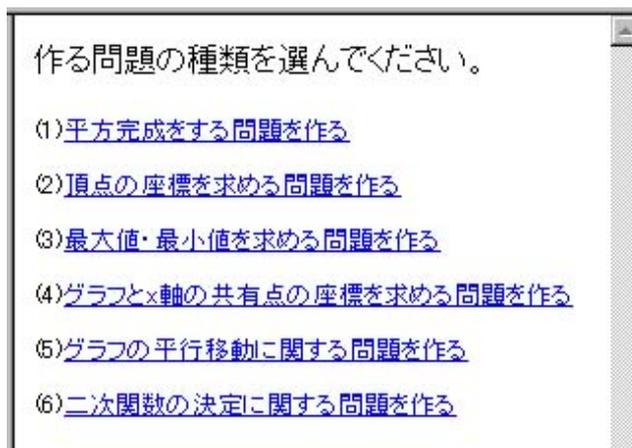


図 5.1 作成する問題の選択

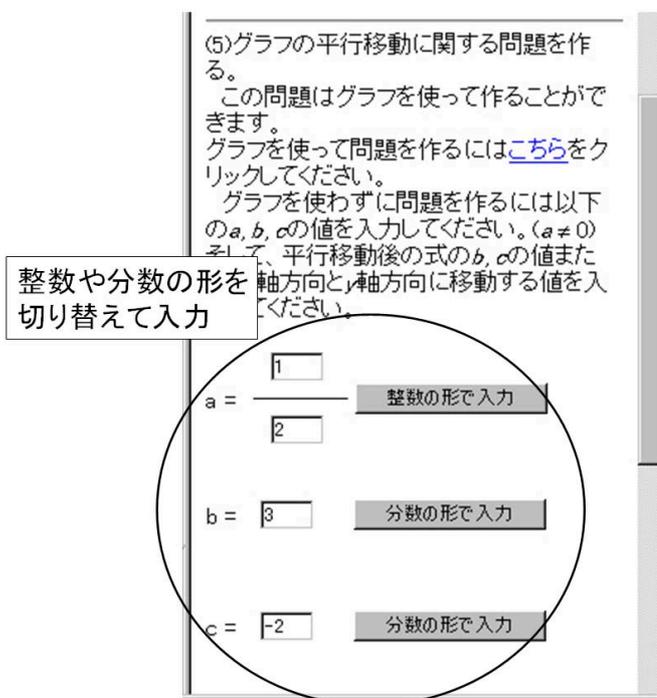


図 5.2 問題の入力 (数値の入力)

れば、図 5.4 と図 5.5 に示すように、問題と、問題が成立したことを知らせるメッセージを青色で表示する。また、システムは入力された数値を保持する。この数値は、ヒントの作成や、学習者が作成した問題の関連事項の解説に用いる。問題が不成立であれば、図 5.6 に示すように、不成立の原因とその修正を求めるメッセージが赤色で表示される。問題が成立し

5.2 システムの画面

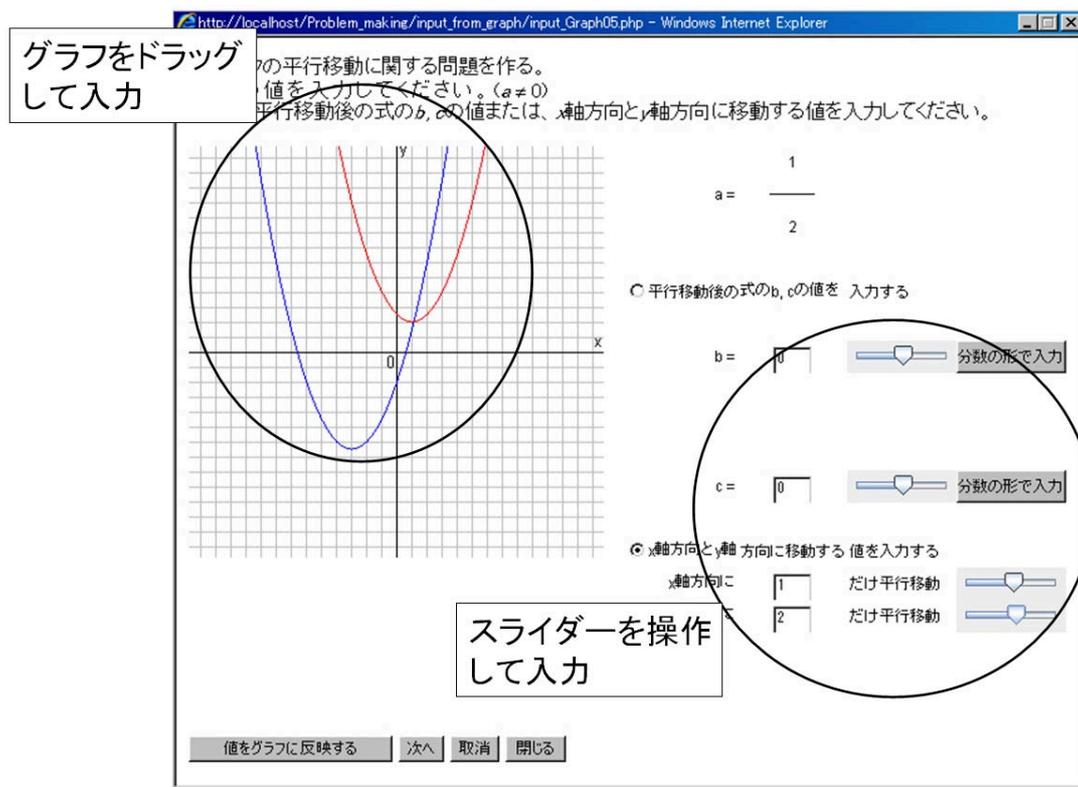


図 5.3 問題の入力 (グラフを用いた入力)

た場合と不成立であった場合に表示するメッセージの色を変えることで、学習者が簡単にメッセージの種類を見分けることができるようにした。

問題成立後、学習者は問題に対する解答を入力する。このとき、問題の解き方が分からない場合、図 5.7 に示すように、ヒントを表示させることができる。ヒントは問題に応じてグラフや計算過程の表示を行い、学習者の要求に応じて段階的に表示していく。解答を入力するとシステムは解答の診断を行う。診断の結果、解答が正答であれば図 5.8 に示すように、正答であることを知らせるメッセージを青色で表示する。また、図 5.9 に示すように、作成した問題の関連事項の解説を表示する。解説には問題に応じてグラフや表を用いる。解答が誤答であれば、図 5.10 に示すように、解答の修正を求めるメッセージと、ヒントの参照を勧めるメッセージが赤色で表示される。

5.2 システムの画面

グラフの平行移動に関する問題

問題: 二次関数 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$ のグラフを x 軸方向に1、 y 軸方向に2だけ平行移動したグラフの方程式 $y = a(x - p)^2 + q$ を求めてください。

貴方の解答: ここに貴方が入力した解答が表示されます。

p =

q =

図 5.4 問題の表示

問題の入力が正しく行われました。
作成した問題を表示しました。

図 5.5 問題が成立したときのメッセージ

a=0のため二次関数になっていません。
x軸方向にもy軸方向にも平行移動していません。
入力をやり直してください。

図 5.6 問題が不成立であったときのメッセージ

5.2 システムの画面

ヒントのグラフの表示

計算過程の表示

$y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$ を平方完成する。
 x^2 の係数 $\frac{1}{2}$ で x^2 の項と x の項をくくる。
 $y = \frac{1}{2}(x^2 + 6x) - 2$

続きを見る

閉じる

ヒントの続きを要求

図 5.7 解き方のヒント



図 5.8 解答が正答であったときのメッセージ

5.2 システムの画面

正解です。
 グラフの移動は、平行移動以外に対称移動があります。

(1)x軸に対して対称移動したグラフの方程式
 $y = -f(x)$

(2)y軸に対して対称移動したグラフの方程式
 $y = f(-x)$

(3)原点に対して対称移動したグラフの方程式
 $y = -f(-x)$

表の表示

移動方法	二次方程式
対称移動前	$y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{13}{2}$
x軸に対して対称移動	$y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{13}{2}$
y軸に対して対称移動	$y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{13}{2}$
原点に対して対称移動	$y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{13}{2}$

閉じる

図 5.9 作成した問題の関連事項の解説

qの値が間違っています。
 答えの入力をやり直してください。
 問題の解き方が分からない場合は「ヒントを表示」ボタンを押してください。

図 5.10 解答が誤答であったときのメッセージ

第 6 章

システムの評価

6.1 評価前の調査

本研究では評価を行う前に，本システムが作問学習支援システムとして有効なものであるかを確認するために，高校の数学教員 1 名に使ってもらい意見を頂いた．以下に頂いた意見を示す．

- 作問学習は数学の学習方法として非常に効果的である．
- 本システムは作問学習支援システムとして有効である．
- 問題の解き方のヒントとしてグラフを表示することは有効である．
- 作成した問題の関連事項を表でまとめることは有効である．
- 表示される計算式が複雑に見えてしまう．
- 入力ボタンの名前や，画面に表示されている文章に戸惑いを感じる部分がある．
- 最大値・最小値を求める問題において， x の定義域は固定で，一次の係数が文字係数である問題が作成できると良い．

これにより，本システムは作問学習支援システムとして有効であると考えられる．しかし，評価を行う前にシステムの改良が必要であることが分かった．そこで，頂いた意見をもとにシステムの表示画面の改良を行い，作成できる問題の追加は今後の課題とした．

6.2 評価の目的

6.2 評価の目的

本システムの構築にあたり、作問学習を自主学習に採り入れ易くすることを目的とした。従って、評価の目的は、本システムを用いることで作問学習を自主学習に採り入れ易くなったかを確認することである。

6.3 評価の手法

二次関数を学習済みの高校1年生3名に協力してもらい、改良後の本システムについて評価を行ってもらった。最初にシステムの目的とシステムのデモンストレーションを行った後、自由にシステムを使ってもらった。作問学習終了後、アンケートに回答してもらった。アンケートは、各問題の支援方法に対する評価において、同じの評価項目を各問題に対して個別に設問し、アンケート全体で5択式が28項目と自由記述式を1項目とした。

6.4 評価項目

評価は各問題の支援方法に対する評価と、システム全体に対する評価を5択式で行ってもらった。また、最後には自由記述欄を設けた。5択式の各評価項目は下記の通りである。

6.4.1 各問題の支援方法に対する評価

評価項目として以下の(a)~(f)を用意し、各問題に対して個別に設問した。

- (a) グラフを用いた入力は、この問題の作成に役立ったか。
- (b) グラフを用いた入力は、この問題の理解に役立ったか。
- (c) ヒントとして表示された計算過程は、この問題の解き方の参考になったか。
- (d) ヒントとして表示されたグラフは、この問題の解き方の参考になったか。
- (e) 正答入力後の表を用いたこの問題の関連事項の解説は、この問題の理解に役立ったか。
- (f) 正答入力後のグラフを用いたこの問題の関連事項の解説は、この問題の理解に役立っ

6.4 評価項目

たか。

(a) は、その問題の作成にグラフを用いることは適切であったかを確認するために用意した。この項目は、グラフの平行移動に関する問題、二次関数の決定に関する問題で設問した。

(b) は、その問題の理解に、グラフを用いた入力を行うことは適切であったかを確認するために用意した。この項目は、グラフの平行移動に関する問題、二次関数の決定に関する問題で設問した。

(c) は、その問題を解くヒントとして、計算過程を表示することは適切であったかを確認するために用意した。この項目は全ての問題で設問した。

(d) は、その問題を解くヒントとして、グラフを表示することは適切であったかを確認するために用意した。この項目は、頂点の座標を求める問題、最大値・最小値を求める問題、グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題、グラフの平行移動に関する問題で設問した。

(e) は、その問題の関連事項の解説に表を用いることは適切であったかを確認するために用意した。この項目は、グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題以外の問題で設問した。

(f) は、その問題の関連事項の解説にグラフを用いることは適切であったかを確認するために用意した。この項目は、最大値・最小値を求める問題、グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題で設問した。

6.4.2 システム全体に対する評価

評価項目として以下の (g) ~ (m) を用意した。

(g) システムの操作性は良かったか。

(h) 画面は見易かったか。

(i) 作問学習に興味・関心を持つことができたか。

(j) 作問学習をもっとやりたいと思うか。

(k) 本システムを用いて作問学習をもっとやりたいと思うか。

(l) 本システムを用いることで、自主学習で作問学習を行えると思うか。

6.5 評価結果

(m) 自主学習で本システムを用いた作問学習をやりたいと思うか。

(g) は、システムの操作方法は適切であったかを確認するために用意した。

(h) は、システムの画面の構成や表示が適切であったかを確認するために用意した。

(i) は、作問学習を行った結果、作問学習に興味や関心を持つことができたかを確認するために用意した。

(j) は、作問学習に対する意欲を確認するために用意した。

(k) は、本システムによる作問学習に対する意欲を確認するために用意した。

(l) は、本システムが、自主学習での作問学習を支援するシステムとして有効か確認するために用意した。

(m) は、本システムによる自主学習での作問学習に対する意欲を確認するために用意した。

6.5 評価結果

各評価項目の結果を示す。

6.5.1 各問題の支援方法に対する評価

(a) グラフを用いた入力は、この問題の作成に役立ったか。

表 6.1 評価項目 (a) の結果

	参考にならなかった	あまり参考にならなかった	どちらとも言えない	少し参考になった	参考になった
グラフの平行移動に関する問題	0	0	1	0	2
二次関数の決定に関する問題	0	0	0	1	2

6.5 評価結果

(b) グラフを用いた入力は，この問題の理解に役立ったか．

表 6.2 評価項目 (b) の結果

	参考にならなかった	あまり参考にならなかった	どちらとも言えない	少し参考になった	参考になった
グラフの平行移動に関する問題	0	0	0	1	2
二次関数の決定に関する問題	0	0	1	0	2

(c) ヒントとして表示された計算過程は，この問題の解き方の参考になったか．

表 6.3 評価項目 (c) の結果

	参考にならなかった	あまり参考にならなかった	どちらとも言えない	少し参考になった	参考になった
平方完成をする問題	0	0	0	1	2
頂点の座標を求める問題	0	0	0	1	2
最大値・最小値を求める問題	0	0	0	1	2
グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題	0	0	1	0	2
グラフの平行移動に関する問題	0	0	0	1	2
二次関数の決定に関する問題	0	0	0	1	2

6.5 評価結果

(d) ヒントとして表示されたグラフは，この問題の解き方の参考になったか．

表 6.4 評価項目 (d) の結果

	参考にならなかった	あまり参考にならなかった	どちらとも言えない	少し参考になった	参考になった
頂点の座標を求める問題	0	0	0	2	1
最大値・最小値を求める問題	0	0	0	1	2
グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題	0	0	0	1	2
グラフの平行移動に関する問題	0	0	0	1	2

(e) 正答入力後の表を用いたこの問題の関連事項の解説は，この問題の理解に役立ったか．

表 6.5 評価項目 (e) の結果

	参考にならなかった	あまり参考にならなかった	どちらとも言えない	少し参考になった	参考になった
平方完成をする問題	0	0	0	1	2
頂点の座標を求める問題	0	0	0	1	2
最大値・最小値を求める問題	0	0	0	1	2
グラフの平行移動に関する問題	0	0	0	1	2
二次関数の決定に関する問題	0	0	0	1	2

6.5 評価結果

(f) 正答入力後のグラフを用いたこの問題の関連事項の解説は，この問題の理解に役立つか．

表 6.6 評価項目 (f) の結果

	参考にならなかった	あまり参考にならなかった	どちらとも言えない	少し参考になった	参考になった
最大値・最小値を求める問題	0	0	0	2	1
グラフと x 軸の共有点の座標を求める問題	0	0	1	0	2

6.5.2 システム全体に対する評価

(g) システムの操作性は良かったか．

悪かった	少し悪かった	どちらとも言えない	少し良かった	良かった
0	0	1	1	1

(h) 画面は見易かったか．

見難かった	少し見難かった	どちらとも言えない	少し見易かった	見易かった
0	2	0	1	0

(i) 作問学習に興味・関心を持つことができたか．

持てなかった	あまり持てなかった	どちらとも言えない	少し持てた	持てた
0	0	1	2	0

6.5 評価結果

(j) 作問学習をもっとやりたいと思うか。

思わない	あまり思わない	どちらとも言えない	少し思う	思う
0	0	1	2	0

(k) 本システムを用いて作問学習をもっとやりたいと思うか。

思わない	あまり思わない	どちらとも言えない	少し思う	思う
0	0	1	1	1

(l) 本システムを用いることで、自主学習で作問学習を行えると思うか。

思わない	あまり思わない	どちらとも言えない	少し思う	思う
0	0	1	0	2

(m) 自主学習で本システムを用いた作問学習をやりたいと思うか。

思わない	あまり思わない	どちらとも言えない	少し思う	思う
0	0	1	2	0

6.5.3 意見・感想

本システムを使った高校生から頂いた意見や感想を以下に示す。

- 解説はとても分かり易くて良いと思う。
- ヒントが先生より分かり易かった。
- 問題を作ることの楽しさもあるし、作問学習をやっていけば、確実に効果はあると思う。

6.6 評価結果の考察

- なかなか面白いものをやらせてもらった．
- 数字や文字が入り組んでいて見難かったので，もっとページを増やして見やすくしてほしい．
- 画面に映るものが白黒なので見辛い．
- 行間をもっと空けてほしい．

6.6 評価結果の考察

本システムでは，二次関数の作問学習の支援として，問題を作成する段階の支援，問題に解答する段階の支援，正答入力後の支援を行った．これらの支援について，評価の結果から考察する．

問題を作成する段階の支援として，問題に応じてグラフを用いた入力を行えるようにした．評価項目 (a)，(b) の結果，概ね良い評価が得られた．よって，本システムによる問題を作成する段階の支援は適切であると考えられる．

問題に解答する段階の支援として，問題の解き方のヒントを提示した．今回提示したヒントでは，計算過程と問題に応じてグラフの表示を行い，評価項目 (c)，(d) の結果，概ね良い評価が得られた．よって，本システムによる問題に解答する段階の支援は適切であると考えられる．

正答入力後の支援として，問題の関連事項の解説を行った．今回行った解説では，問題に応じて表やグラフを用い，評価項目 (e)，(f) の結果，概ね良い評価が得られた．よって，本システムによる正答入力後の支援は適切であると考えられる．

以上のことから，本システムによる二次関数の作問学習の支援は適切であると考えられる．また，評価項目 (l) の結果から，本システムは自主学習での作問学習を支援するシステムとして有効であることが分かった．従って，本システムを用いることで作問学習を自主学習に採り入れ易くできると考えられる．しかし，評価項目 (h) の結果や頂いた意見から，システムの画面が見難いことが分かったため，表示画面は改良が必要である．この内，「画面に

6.6 評価結果の考察

映るものが白黒なので見辛い」という意見があった。本システムでは、表示するメッセージには赤色や青色を使っているが、メッセージ以外の文章や数式は全て黒い文字であり、かつ文字の大きさや書体も同じであった。このため、学習者には注目すべき部分が直感的に分かり難く、見辛くなってしまったと考えられる。よって、学習者に注目してもらいたい部分の色や書体を変えるなど、メリハリのある表示を検討する必要がある。また、評価項目 (k) ~ (m) の結果から生徒は、本システムを用いることで、自主学習で作問学習を行うことができると考えてはいるが、本システムを用いた作問学習への意欲はあまり高くないことが分かった。従って、学習者の学習意欲を高める仕組みが必要である。

第 7 章

おわりに

本研究では，作問学習を自主学習として採り入れ易くすることを目的に，作問学習支援システムを構築した．作問学習の支援として，問題の成立・不成立の判断をシステムが行うようにした．また，作成した問題に対する解答の正誤判断をシステムが行うようにした．作問学習の対象として本研究では，高校数学の二次関数から 6 種類の問題を取り上げ，作成できるようにした．二次関数の作問学習の支援として各問題に応じて，グラフの表示，計算過程の表示，表の表示を行った．本研究で構築したシステムは，評価を行う前に高校の数学教員に使ってもらい意見を頂きシステムの改良を行った．そして，高校生に改良後のシステムを使ってもらいアンケートによる評価を行ってもらった．評価の結果，本システムは自主学習での作問学習を支援するシステムとして有効であることが分かった．しかし，本システムの表示画面については改良が必要であることが分かった．

今後の課題として，システムの画面が見難いといった意見が多かったことから，画面の表示について再検討し，見易い画面となるようシステムの改良を行う．また，作成できる二次関数の問題の追加を行うと共に，追加する問題に対する支援についても検討する．さらに，本システムを用いた作問学習に対する学習者の学習意欲を高める仕組みについても検討する．この他，今後の課題として，あるグラフを平行移動したグラフと x 軸の共有点の座標を求める問題といった，複数の問題を組み合わせた問題の作問学習を行えるシステムの実装や，問題解決方略を取り入れた指導システムの実装が挙げられる．

謝辞

本研究及び研究室活動の全般に関して，多大なるご指導と適切なお提言を頂きました高知工科大学情報システム工学科，妻鳥貴彦講師に心よりお礼申し上げます．

ご多忙な中，本研究の副査をお引き受け頂きました高知工科大学情報システム工学科，篠森敬三講師に心よりお礼申し上げます．

同じく，ご多忙な中，本研究の副査をお引き受け頂きました高知工科大学情報システム工学科，福本晶弘講師に心よりお礼申し上げます．

本研究に関して，多大なるご協力を頂きました修士 2 年生の寒川剛志さん，大黒隆弘さんに心から感謝致します．

同じく，本研究に関して，多大なるご協力を頂きました修士 1 年生の藤原健太郎さん，福田将行さん，畠山博和さん，山崎雄大さんに心から感謝致します．

本研究室で共に活動し，支え合ってきました学部 4 年生の森拓也さん，池田真実さん，清水雅也さん，浜田洋さん，竹内雄人さん，別府瞳さんに心から感謝致します．

本システムの動作テストにご協力して頂きました学部 3 年の皆様に心から感謝致します．

本研究に関して，現場の教師としてご助言をして頂きました西山太彩先生に心から感謝致します．

最後に，ご多忙な中，本システムの評価にご協力して頂きました高知工業高校の武田豊先生及び生徒の皆様に心から感謝致します．

参考文献

- [1] 日本学術会議数学研究連絡委員会附置・数学教育小委員会, “「算数」・「数学」はなぜ学校教育に必要なのか”, 中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会算数・数学専門部会 (第 2 回), 2004
- [2] 仙台市立蒲町中学校, “数学科学習指導案”, 2004
- [3] 那覇教育事務所, “学ぶ意欲を高める授業の工夫”, 2006
- [4] 平嶋 宗, “「問題を作ることによる学習」の分類と知的支援の方法”, 教育システム情報学会研究報告, Vol.20, No.3, pp.3-10, 2005
- [5] 横山 琢郎, 平嶋 宗, 岡本 真彦, 竹内 章, “単文統合による作問を対象とした学習支援システムの長期利用とその効果”, 日本教育工学会論文誌 30(4), pp.333-341, 2007
- [6] 国立教育政策研究所, “平成 17 年度高等学校教育課程実施状況調査”,
http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h17_h/index.htm
- [7] 金沢工業大学, “KIT 数学ナビゲーション”,
<http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/>
- [8] 藤田 宏, “理解しやすい数学 I”, 文英堂, 1994
- [9] Wikibooks, “高等学校数学 I/二次関数”,
<http://ja.wikibooks.org/wiki/>