

平成 16 年度

特別研究セミナー課題研究報告書

誤差の影響を受けた
共役勾配法の反復回数の最適化

1050337 竹内 翔

指導教員 福本 昌弘

2005 年 3 月 11 日

高知工科大学 情報システム工学科

要 旨

誤差の影響を受けた 共役勾配法の反復回数の最適化

竹内 翔

連立 1 次方程式を反復法を用いて解く場合，入力信号が誤差の影響を受けていると，算出される近似解の真値との残差が増大してしまい，結果として解を正しく得られない問題が起こる．そのため，誤差の影響を受けた信号であっても残差の増大を抑える方法の確立が必要である．本論文では，反復法の 1 つである共役勾配法の，入力信号が誤差の影響を受けた場合での残差の増大を修正ノルムの値による反復打ち切りと最低反復回数の設定により行い，緩和することが可能であることを示している．

キーワード 共役勾配法，反復回数，誤差

目次

第 1 章	序論	1
1.1	背景と目的	1
1.2	構成	1
第 2 章	最適化問題	3
2.1	まえがき	3
2.2	最適化問題の種類	3
2.2.1	線形最適化問題	3
2.2.2	非線形最適化問題	4
2.3	最適化問題の解法	4
2.3.1	線形最適化問題のアルゴリズム	5
2.3.2	非線形最適化問題のアルゴリズム	5
2.3.3	線形最適化問題と連立 1 次方程式	5
2.4	まとめ	6
第 3 章	共役勾配法	7
3.1	まえがき	7
3.2	連立 1 次方程式の解法	7
3.2.1	直接法	7
3.2.2	反復法	8
3.3	共役勾配法	9
3.3.1	共役勾配法を用いるときの条件	9
3.3.2	HS 版	9
3.4	誤差影響下での共役勾配法	12

目次

3.5	最適反復回数の変化	12
3.5.1	評価	12
3.6	反復回数と残差の関係	15
3.7	まとめ	16
第 4 章	反復打ち切りによる残差軽減	17
4.1	まえがき	17
4.2	修正ベクトルによる打ち切り	17
4.2.1	修正ベクトル	17
4.2.2	最低反復回数の設定の必要性	18
4.2.3	最低反復回数保証付き共役勾配法	19
4.3	計算機シミュレーション	19
4.3.1	シミュレーション条件と評価法	19
4.3.2	結果と評価	20
4.4	最低反復回数設定の指針	22
4.4.1	評価	23
4.5	まとめ	24
第 5 章	結論	25
5.1	まとめ	25
5.2	今後の課題	25
	謝辞	26
	参考文献	27

図目次

3.1	真値との残差の比較	15
4.1	修正ノルム	18
4.2	反復打ち切りの流れ	20
4.3	最低反復回数と S/N の違いによる最適反復回数と反復打ち切り回数との差 の平均	22
4.4	最低反復回数 0	23
4.5	最低反復回数 40	24

表目次

3.1	相関係数が 0.1 の場合	13
3.2	相関係数が 0.3 の場合	13
3.3	相関係数が 0.5 の場合	13
3.4	相関係数が 0.7 の場合	14
3.5	相関係数が 0.9 の場合	14
3.6	相関係数が 1.0 の場合	14
4.1	S/N 50dB 環境	20
4.2	S/N 40dB 環境	21
4.3	S/N 30dB 環境	21
4.4	S/N 20dB 環境	21
4.5	S/N 10dB 環境	21
4.6	S/N 0dB 環境	21
4.7	打ち切り回数と最適反復回数との差の平均値	23

第 1 章

序論

1.1 背景と目的

ディジタル信号処理で扱う対象は，多くの場合線形モデルで表現されている．線形最適化問題を解くことは，連立 1 次方程式の解を求めることである．連立方程式を解く方法は，直接法と反復法に分類される．この 2 つはともに，入力信号が誤差の影響を受けた場合厳密解には到達しない．しかし，反復法を用いることにより近似解は求めることが可能である．連立 1 次方程式を反復法を用いて解く場合，入力信号が誤差の影響を受けていると，算出される近似解の真値との残差が増大してしまい，結果として線形最適化問題の解を正しく得られない問題が起こる．そのため，誤差の影響を受けた信号であっても残差の増大を抑える方法の確立が必要である．過去の研究では，入力信号の条件数とそれをもとに描いた回帰直線によって残差を軽減する反復回数の検討がなされている [1]．

本研究では，反復法の 1 つである共役勾配法の，入力信号が誤差の影響を受けた場合での残差の増大を緩和する手法を検討する．そのため，共役勾配法の反復に伴い算出される値に着目した．

1.2 構成

本稿の概要について述べる．

第 2 章では，最適化問題について説明し，連立方程式を解く必要性を述べる．

第 3 章では，連立方程式の解法について説明を行い，共役勾配法を用いて連立方程式を解

1.2 構成

く場合，入力信号が雑音による誤差の影響を受けているときの残差の変化を考察する．

第 4 章では，残差の増大を緩和する手法の説明を行い，計算機シミュレーションによって残差軽減の検証を行う．

最後に，第 5 章では，本研究の評価をし，今後の課題を述べる．

第 2 章

最適化問題

2.1 まえがき

ディジタル信号処理で扱う対象は、多くの場合線形モデルで表現されており、線形最適化問題として扱うことが可能である。本章では最適化問題について述べる。

2.2 最適化問題の種類

最適化問題は、対象とする事象により線形最適化問題と非線形最適化問題に分類される。以下にそれぞれの説明をする。

2.2.1 線形最適化問題

線形最適化問題とは、対象とするモデルの目的関数と制約条件がすべて線形である。すなわち変数に関する 1 次式で表現できるような問題を指す。線形最適化問題は、一般的に

目的関数

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max \text{ (or } \min) \quad (2.1)$$

制約関数

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

2.3 最適化問題の解法

$$\begin{array}{c} \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \quad (2.2)$$

と表すことができる．

線形最適化問題は，制約条件 $Ax \leq b$ のもとで，目的関数 $f(x) = c^T x$ を最小化するような変数ベクトル $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ を見いだす問題であるといえる．これを行列を用いて表すと

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

となる．

2.2.2 非線形最適化問題

非線形最適化問題とは，目的関数または，制約条件の少なくとも一方が非線形関数であるような最適化問題のことである．目的関数が非線形の場合，局所最適解が問題となる．局所最適解を無視できる場合には勾配法を適用することができるが，無視できない場合には確立的探索を用いる必要がある．確立的探索を用いる場合，目的関数が単峰性か多峰性かを調べる必要がある．

2.3 最適化問題の解法

一般に，ある最適化問題を解くには問題の背景に十分な注意を払って，制約条件や目的関数の評価基準を定め，数式もしくはグラフ等のモデルによって最適化問題を単純化する．そして，単純化された問題に対してアルゴリズムを適用し，主に計算機上でシミュレーションを行うことによって最適化問題の解を得ることができる．以下に線形，非線形それぞれの場合におけるアルゴリズムの説明を行い，線形最適化問題と連立 1 次方程式との関係について

2.3 最適化問題の解法

述べる．

2.3.1 線形最適化問題のアルゴリズム

線形最適化問題に対するアルゴリズムでもっとも一般的なものは、シンプレックス法である．シンプレックス法は、一般の線形最適化問題に対してなるべく効率よく、解の現れる端点を探しだそうとするアルゴリズムである．シンプレックス法では、解が存在するか否かをはじめに判定する過程、および解が有界か否かを判定する過程も含むように工夫されており、収束性も保証されていることから、極めて優れた一般性のあるアルゴリズムであるといえる．しかし、設計変数の数が多い大規模線形最適化問題には適さないという欠点も存在する．

2.3.2 非線形最適化問題のアルゴリズム

非線形最適化問題に対するアルゴリズムとしては、Newton 法や準 Newton 法が一般的である．これは、目的関数の勾配ベクトルと、Hesse 行列を利用することで直線上の最小化を繰り返し、最適解を効率的に求めるアルゴリズムである．Newton 法は、解の近傍での収束速度は非常に高いが、諸基点を解の近傍にとらなければ収束性が保証されないという欠点がある．また、Hesse 行列の計算や線形代数方程式を解かなければならないため、計算量が多いことも問題である．

2.3.3 線形最適化問題と連立 1 次方程式

式 2.3 で示されたように、線形最適化問題を解くことは正規方程式を解くこととなり連立 1 次方程式の解を求めることとなる．したがって、連立 1 次方程式の効率的な解法が要求される．

2.4 まとめ

2.4 まとめ

本章では，最適化問題に対する説明を行い，デジタル信号処理と線形最適化問題との関係について述べ，連立 1 次方程式の効率的な解法の必要性を述べた．

第 3 章

共役勾配法

3.1 まえがき

前章では，最適化問題について述べ，連立 1 次方程式を解く必要性について明らかにした．本章では，連立 1 次方程式の解法について述べ，本研究で対象とする反復法の 1 つである共役勾配法について説明する．また，入力信号が誤差の影響を受けた場合について考察する．

3.2 連立 1 次方程式の解法

連立 1 次方程式の解法は大きく分けると直接法と反復法に分類される．以下にそれぞれの特徴について述べる．

3.2.1 直接法

直接法とは，演算に丸め誤差がなければ有限回の演算によって厳密解が得られる解法である．直接法の種類には，Gauss-Jordan 法，Gauss の消去法，LU 分解などがある．ここでは，直接法の代表的な解法であり他の解法の基本となっている Gauss の消去法について述べる．

- 利点

1. 必ず収束し，繰り返し回数は方程式の元数以下になる
2. 手順が簡略で計算量が少ない

3.2 連立 1 次方程式の解法

3. 多少性質の悪い係数行列にも適用可能

- 欠点

1. 正規化によって丸め誤差が生じる
2. 消去の過程の減算によって桁落ちが生じる
3. 乗算回数が多くなって誤差の累積する可能性がある
4. 元の係数行列が破壊してしまう

3.2.2 反復法

反復法は直接法と違い、解は近似値として得られるため、収束判定条件が必要となる。収束判定条件とは真値との差である。計算の手順は以下のようになる。

1. 初期値を与える
2. 反復法の計算
3. 収束判定条件により解が求まるまで手順 2 を繰り返す

また反復法は、手で計算するには手間がかかるが、単純な計算の繰り返しなので計算機にとって非常に都合のよい方法である。そして、収束条件を小さい値にすると反復回数が増えるが、得られた解の精度はよくなる。反復法が収束する速さは係数行列のスペクトルに強く依存する。そのため反復法では、しばしば係数行列をより都合の良いスペクトルを持った特別の行列に変換するような行列を必要とする。この変換行列のことを前処理行列と呼ぶ。良い前処理行列の使用は反復法の収束性を改良し、前処理行列を構築したり適用するのに必要な余分のコストを十分回収できる。反復法には、Jacobi 法、Gauss-Seidel 法、共役勾配法などがある。反復法の利点と欠点は以下のようである。

- 利点

1. 大次元の連立 1 次方程式を解く場合に適している
2. 要素に 0 を含んだ係数行列をもつ連立 1 次方程式では演算回数が減る

3.3 共役勾配法

- 欠点

1. 収束条件を満たす行列のみで，適用範囲が限定されている
2. 反復演算による誤差が生じやすい

3.3 共役勾配法

共役勾配法は 1952 年に，M.R.Hestenes と E.Stiefel によって発表された．これは，正定値対称行列を係数とする n 元連立方程式を一定の手順によって解を求める方法である．

共役勾配法には各種の計算方法があり，HS 版，高橋版，2 階版，RG 版，単調版，LI 版，田辺版がある．本研究では，計算手順が簡略で実装に適した HS 版を用いる．

3.3.1 共役勾配法を用いるときの条件

共役勾配法を用いる場合， n 元連立 1 次方程式を解くことを考え

$$Ax = y \quad (3.1)$$

とする．

このとき，行列 A は正定値対称行列とし

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

で表す．

3.3.2 HS 版

共役勾配法の HS 版は，Hestenes と Stiefel によって発表された基本的なアルゴリズムである．

3.3 共役勾配法

HS 版は

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \quad (3.3)$$

で与えられ，係数

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

が対称

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (3.5)$$

の場合に適用できる．計算手順は以下の通りである．

1. 第 0 近似解

$$x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad \cdots \quad x_n^{(0)} \quad (3.6)$$

を適当に選ぶ．

2. 第 0 近似解に対する残差

$$r_i^{(1)} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(0)} \quad (i = 1, \cdots, n) \quad (3.7)$$

を計算する．これが全て 0 ならば， $x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}$ が解である．

3. 補助変数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ の出発値を

$$p_i^{(0)} = r_i^{(0)} \quad (i = 1, \cdots, n) \quad (3.8)$$

にとる．なお，ここから先は，一般に第 k 近似解から第 $k+1$ 近似解を作るプロセスに共通であるから，第 k 段目のステップという形で書く．最初は， $k=0$ である．

4. $i = 1, \cdots, n$ に対し

3.3 共役勾配法

$$y_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j^{(k)} \quad (3.9)$$

という量を計算する．

5. 第 k 回の修正係数 $\alpha^{(k)}$ を

$$\alpha^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i^{(k)} p_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^n y_i^{(k)} p_i^{(k)}} \quad (3.10)$$

によって求める．

6. 第 $k+1$ 近似値を

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \alpha^{(k)} p_i^{(k)} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.11)$$

によって求める．

7. 第 $k+1$ 近似値に関する残差を

$$r_i^{(k+1)} = r_i^{(k)} - \alpha^{(k)} y_i^{(k)} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.12)$$

という形で計算する．

8.

$$\beta^k = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i^{(k+1)})^2}{\sum_{i=1}^n (r_i^{(k)})^2} \quad (3.13)$$

という量を計算する．

9. 補助変数の新しい値を

$$p_i^{(k+1)} = r_i^{(k+1)} + \beta^k p_i^{(k)} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.14)$$

3.4 誤差影響下での共役勾配法

によって計算する．

10. 収束判定をし，まだ収束が十分でなければ手順 4 にもどる．

3.4 誤差影響下での共役勾配法

共役勾配法は n 元連立方程式を反復により解を近似させていく方法である． n 回以下の反復で厳密解に到達する性質を有しているが，安定性が低く誤差の影響により収束特性が大きく変化する．したがって，残差が最小になる最適な反復回数を求めることが要求される．

3.5 最適反復回数の変化

計算機シミュレーションによって，加法性雑音を加えることにより S/N を変化させ，入力信号の相関係数の違いによる平均最適反復回数の変化を考察する．対象とする行列を 100 次とし， S/N を 50dB，40dB，30dB，20dB，10dB，0dB，相関係数を 0.1，0.3，0.5，0.7，0.9，1.0 と変化させ，10000 回の試行を行った．ただし，このモデルは入力信号に雑音が入入していることを想定しているため，信号 d と雑音 v の比は

$$S/N = \frac{E[||d||^2]}{E[||v||^2]} \quad (3.15)$$

となる．

3.5.1 評価

表 3.1～表 3.6 により，相関係数に関わらず S/N が大きくなるにつれて平均反復回数は増大した．また， S/N が 30dB 以下では相関係数の値の違いによる平均反復回数の変化があまり見られなかった．更に， S/N が 10dB，0dB に限り相関係数に関わらず，すべての反復回数が 1 で最適反復回数となった．

S/N や相関係数の値に関わらず，平均最適反復回数がすべて 100 回未満ということから，100 回の反復を行うとある地点で残差が最小となり，その後の反復により残差が増大しているということが推測される．

3.5 最適反復回数の変化

表 3.1 相関係数が 0.1 の場合

S/N	平均最適反復回数
50	36.89
40	10.8762
30	2.8162
20	1.0028
10	1.0
0	1.0

表 3.2 相関係数が 0.3 の場合

S/N	平均最適反復回数
50	29.0312
40	8.7395
30	2.4387
20	1.0023
10	1.0
0	1.0

表 3.3 相関係数が 0.5 の場合

S/N	平均最適反復回数
50	21.2507
40	7.0784
30	2.1796
20	1.0014
10	1.0
0	1.0

3.5 最適反復回数の変化

表 3.4 相関係数が 0.7 の場合

S/N	平均最適反復回数
50	14.509
40	5.3495
30	1.9952
20	1.0008
10	1.0
0	1.0

表 3.5 相関係数が 0.9 の場合

S/N	平均最適反復回数
50	7.8064
40	3.5128
30	1.8263
20	1.0001
10	1.0
0	1.0

表 3.6 相関係数が 1.0 の場合

S/N	平均最適反復回数
50	2.0175
40	2.0
30	2.0
20	1.0
10	1.0
0	1.0

3.6 反復回数と残差の関係

誤差の影響下での反復回数と残差の関係を図 3.1 に示す．対象とする行列は 100 次とし S/N を 50dB , 40dB とした．

残差 ε は

$$\varepsilon = (\|Ax - y\|^2) \quad (3.16)$$

となる．

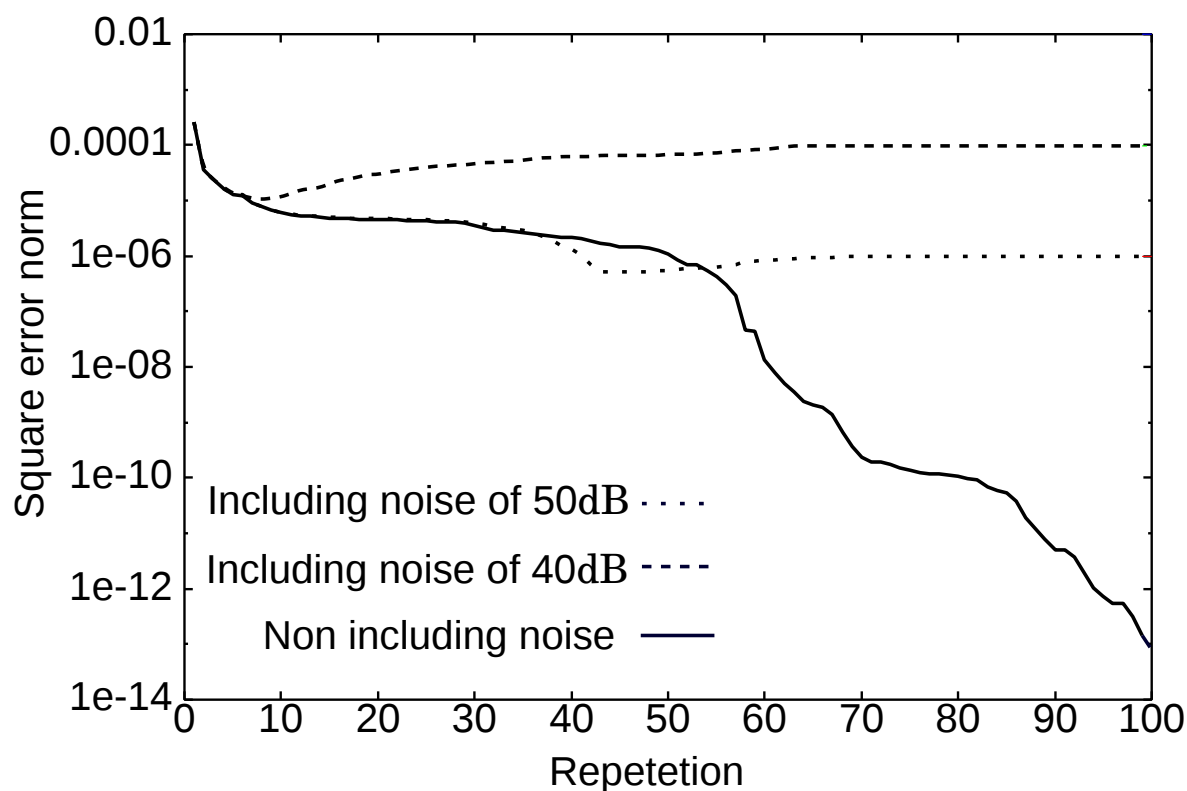


図 3.1 真値との残差の比較

誤差の影響を受けた場合残差が最小になった後反復を続けることにより残差が増加に転じることが表 3.1 により確認できる．したがって，残差が最小となる最適反復回数付近で反復を打ち切ることで残差の増加を緩和することが可能であると考えられる．

3.7 まとめ

3.7 まとめ

本章では，共役勾配法の説明を行い，誤差の影響により残差が増大してしまうことを確認した．そこで，残差が最小になる反復回数で反復を打ち切ることにより残差の増大を緩和することが可能であることを推測した．次章では，実際に打ち切りを行うことにより検証を行う．

第 4 章

反復打ち切りによる残差軽減

4.1 まえがき

前章において、誤差の影響を受けた入力に対する共役勾配法では残差が最小になった後、反復を繰り返すことにより残差が増大してしまうことが示され、残差が最小になる反復回数付近で反復を打ち切ることにより、残差の増大を緩和することが可能であることを推測した。本章では、反復を打ち切る有効性とその手法について述べる。

4.2 修正ベクトルによる打ち切り

残差の増加が起こる直前の最適な反復回数で打ち切るために、共役勾配法の反復に伴い算出される修正ベクトルを用いることを考える。以下に修正ベクトルの説明を行い、反復の打ち切り手順について述べる。

4.2.1 修正ベクトル

修正ベクトルとは、近似解をもとに次回の探索方向とその大きさの決定に用いられる値であり

$$p_{i(k+1)} = r_{(k+1)} + \beta_{(k)} p_{i(k)} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.1)$$

により算出され、反復とともに減少していく傾向がある。 p は修正ベクトル、 k は反復回数、 r は近似解に関する残差、 β は修正係数、 p は補助変数、 i は $0 \sim n$ 、 k は反復回数である。この修正ベクトルのノルムである修正ベクトルのノルム（修正ノルム）の値をもとに打ち切

4.2 修正ベクトルによる打ち切り

りを行う．修正ノルム e は

$$e = \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i^2} \quad (4.2)$$

で算出される値である．ただし，修正ノルムは入力信号の性質により値域が変動するため，一意に打ち切る値を決定できない．このため，入力信号の大きさによる正規化を行う必要がある．

4.2.2 最低反復回数の設定の必要性

修正ノルムは反復とともに減少していく傾向にあるが単調減少ではないため，打ち切り値を設定し反復の打ち切りを行ったとき，最適な反復回数に近づく前に打ち切り値を下回り反復を打ち切ってしまう場合がある．その一例を図 4.1 に示す． S/N が 50dB の環境下での 100 元連立方程式を共役勾配法を用いて解く場合の修正ノルムの値である．

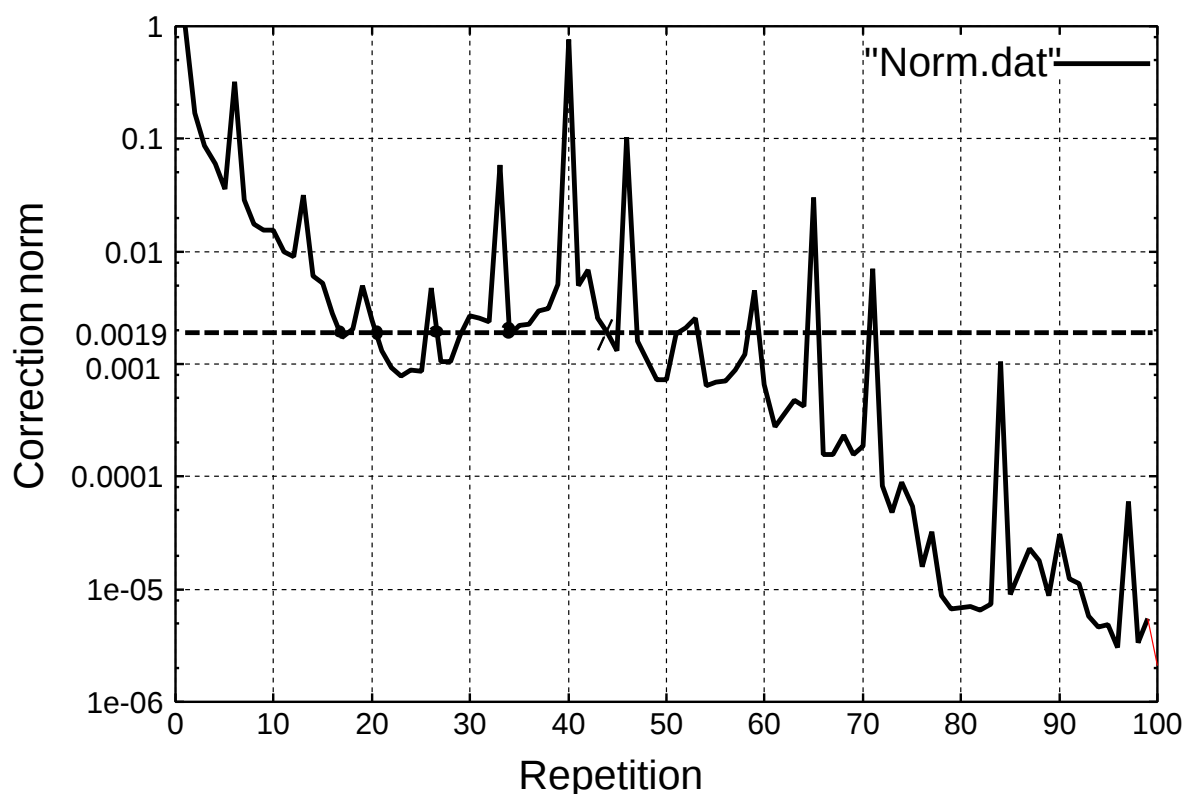


図 4.1 修正ノルム

この環境下での最適反復回数は 44 回である．反復打ち切り条件を，最適反復回数での修

4.3 計算機シミュレーション

正ノルムの値 1.9×10^{-3} 程度にした時，この条件下では反復回数 17 回で 1.9×10^{-3} を下回る．その後，一旦増加した後に 21 回で再度 1.9×10^{-3} を下回り，その後，27 回，34 回，44 回で 1.9×10^{-3} を下回り，最適反復回数と同じとなる．この問題の対策として最低反復回数を設定する．

4.2.3 最低反復回数保証付き共役勾配法

n 元連立 1 次方程式を共役勾配法を用いて解く場合に，反復打ち切りと最低反復回数の保証を組み込んだアルゴリズムを図 4.2 に示す． i の初期値は 1， min は最低反復回数， c は正規化を行った修正ノルムの値， d は打ち切り値である．初めに，最低反復回数と打ち切り値を設定する．そして，現在の反復回数の判別を行い n 回反復を行うと終了する．次に，近似解と修正ノルムを算出する．算出した修正ノルムの正規化を行い，現在の反復回数が最低反復回数を満たしているか判別と，正規化した修正ノルムの値が打ち切り値を下回っているかの判別を行う．ともに条件を満たす場合に反復を打ち切る．条件を満たさない場合は，反復を繰り返す．

4.3 計算機シミュレーション

最低反復回数を設定することにより最適反復回数に近い回数での反復打ち切りが可能であるか計算機シミュレーションを用いて検証を行う．

4.3.1 シミュレーション条件と評価法

S/N が 50dB ~ 0dB の環境下で，修正ノルムの反復打ち切り値と最低反復回数を設定し，10000 回の試行を行った．打ち切り値はそれぞれの環境下での最適反復回数時の修正ノルムの値の平均値を，打ち切り値を設定する際の基準として用いた．評価は，最適反復回数と反復打ち切り回数との差の平均値を用いる．

4.3 計算機シミュレーション

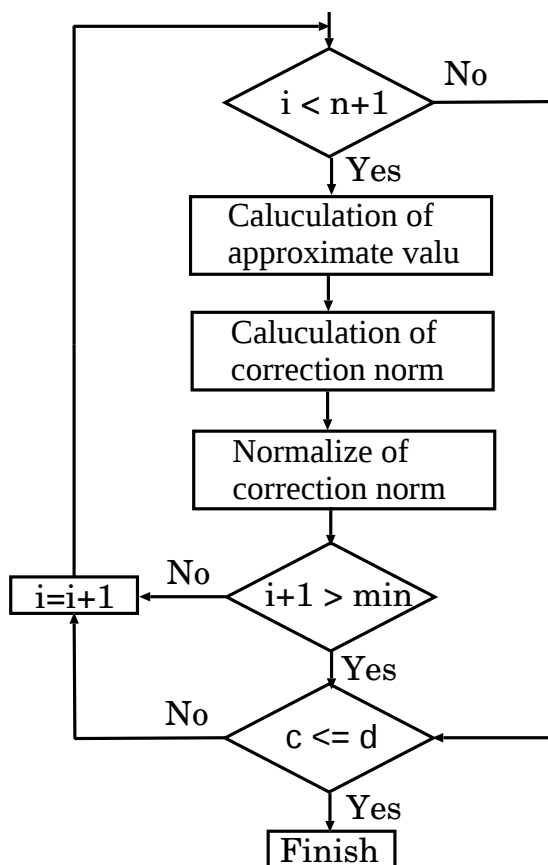


図 4.2 反復打ち切りの流れ

4.3.2 結果と評価

計算機シミュレーションの結果を表 4.1～表 4.6 と図 4.3 に示す．この結果からすべての環境下で最低反復回数の設定する値により最適反復回数との残差が増減していることが確認できる．すなわち，最適反復回数との残差が最小となる最低反復回数を設定することにより，最適反復回数に近い回数で打ち切りが可能であり残差の増大を緩和できることが示された．

表 4.1 S/N 50dB 環境

打ち切り値	最低反復回数					
	0	10	20	30	40	50
0.013	28.0	25.2	16.9	12.3	13.7	19.2

4.3 計算機シミュレーション

表 4.2 $S/N40\text{dB}$ 環境

打ち切り値	最低反復回数					
	0	10	20	30	40	50
0.026	8.35	2.95	9.72	19.2	29.2	39.0

表 4.3 $S/N30\text{dB}$ 環境

打ち切り値	最低反復回数					
	0	10	20	30	40	50
0.010	6.19	12.9	21.7	30.3	39.8	49.3

表 4.4 $S/N20\text{dB}$ 環境

打ち切り値	最低反復回数					
	0	10	20	30	40	50
0.009	7.59	17.0	25.2	33.2	42.3	51.6

表 4.5 $S/N10\text{dB}$ 環境

打ち切り値	最低反復回数					
	0	10	20	30	40	50
0.008	7.82	17.7	25.7	33.5	42.7	51.8

表 4.6 $S/N0\text{dB}$ 環境

打ち切り値	最低反復回数					
	0	10	20	30	40	50
0.008	7.72	17.6	25.9	33.7	42.9	51.9

Average of error

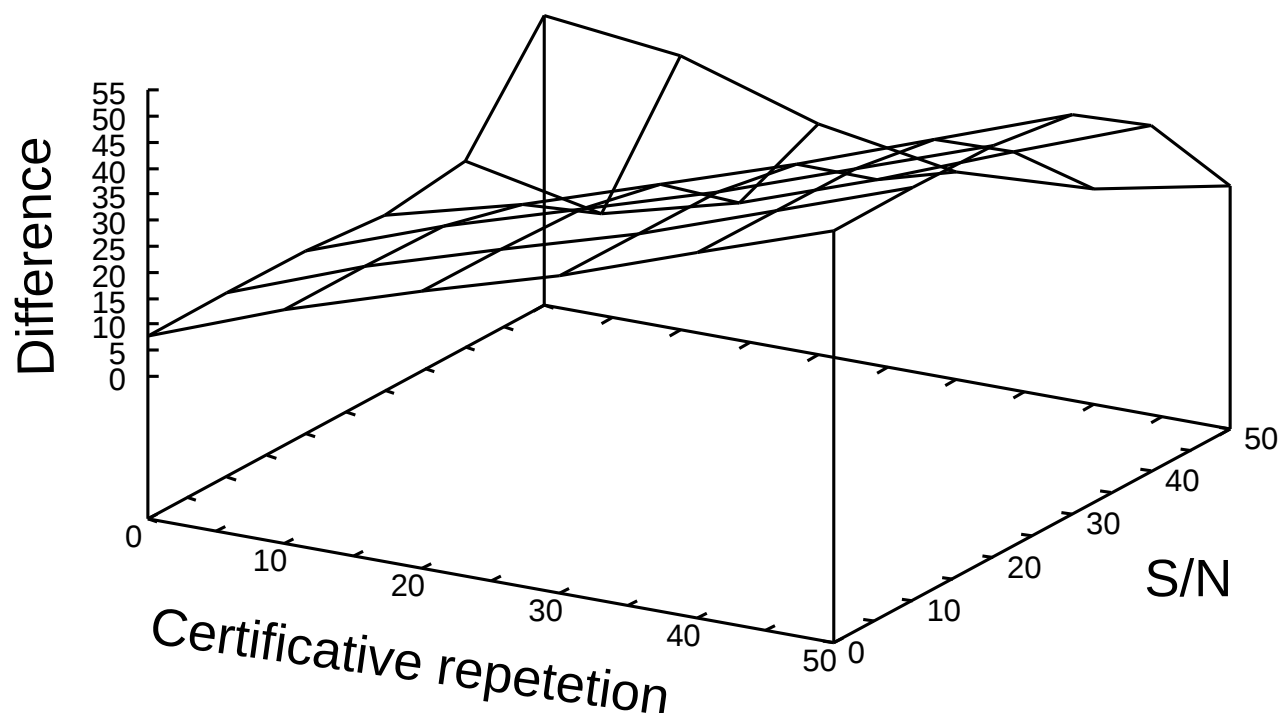


図 4.3 最低反復回数と S/N の違いによる最適反復回数と反復打ち切り回数との差の平均

4.4 最低反復回数設定の指針

図 4.3 により最低反復回数を設定することで残差の増大を緩和することが可能であることが示されたが，残差を最小にするためにはより最適反復回数に近い回数での反復打ち切りが必要である．そこで，最低反復回数の設定数の違いによる打ち切り回数と最適反復回数との差の平均値を表 4.7 に示し，最低反復回数の設定数が 0 回と 40 回の場合の打ち切り回数と最適反復回数との差の分布を図 4.4，4.5 に示す．ただし， S/N が 50dB 環境下での場合である．

4.4 最低反復回数設定の指針

表 4.7 打ち切り回数と最適反復回数との差の平均値

	最低反復回数					
	0	10	20	30	40	50
平均値	-31.3	-28.6	-19.9	-10.2	-0.03	9.9

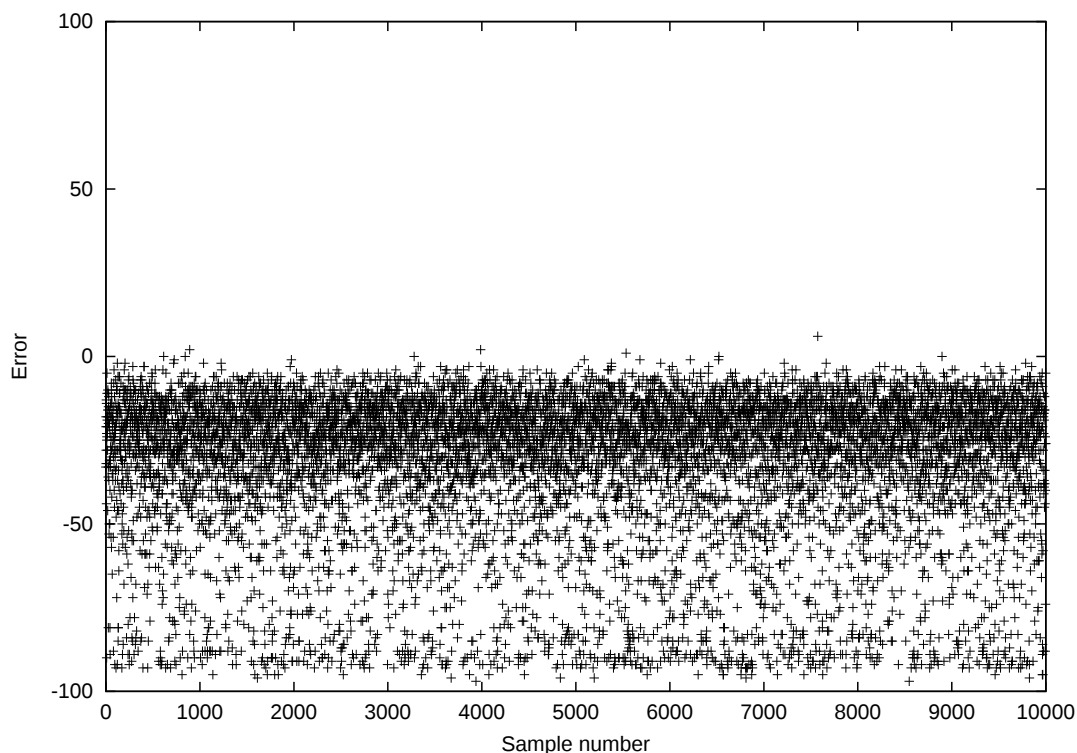


図 4.4 最低反復回数 0

4.4.1 評価

最低反復回数の設定数が 0 回の場合，最適反復回数に到達する前に反復を打ち切ってしまう場合が多い傾向が見られ，最低反復回数の設定数が 50 回の場合では最適反復回数を超えて反復を打ち切ってしまう傾向が見られた．この結果から最低反復回数を設定することで打ち切り回数と最適反復回数との差を減少させることができるが，設定数によっては逆に差を増大させてしまう場合があることが分かった．

4.5 まとめ

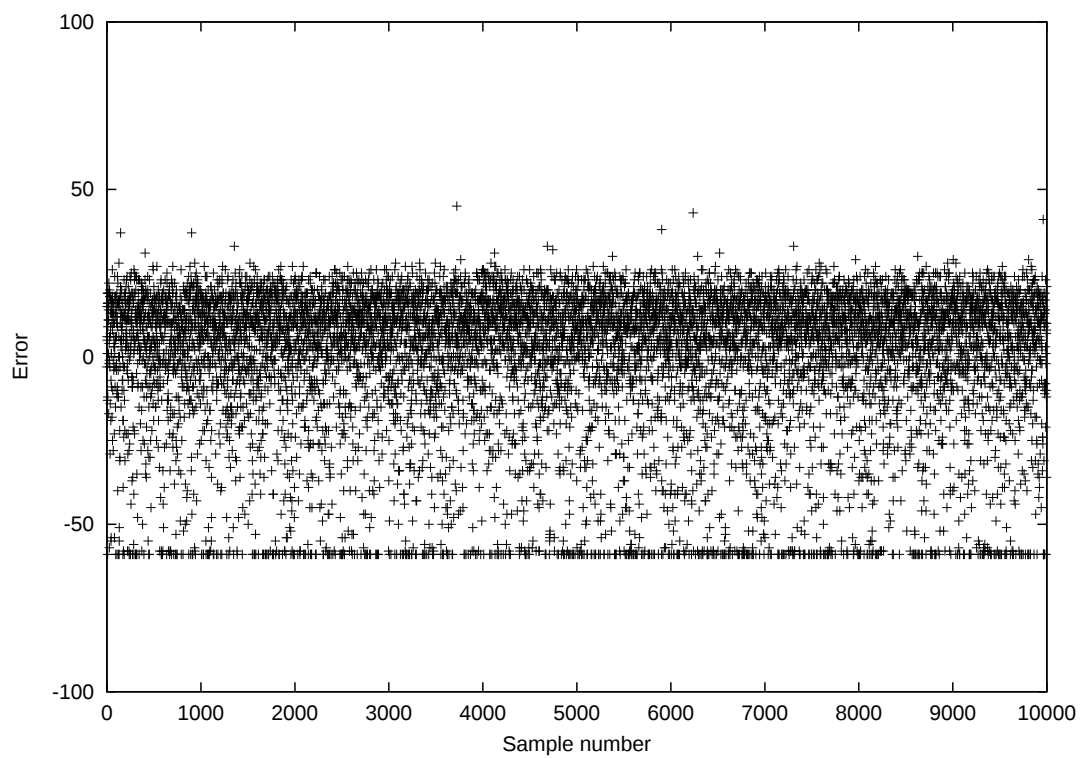


図 4.5 最低反復回数 40

4.5 まとめ

本章では、反復打ち切りの手法の説明を行い、残差軽減の検証を行った。その結果、打ち切り条件を設定することで残差の軽減が可能であることを示した。また、最低反復回数設定の指針を示した。

第 5 章

結論

5.1 まとめ

共役勾配法では誤差の影響を受けた場合，残差が最小となった後の反復により残差は増加に転じてしまう．そこで共役勾配法の修正ベクトルに着目し，修正ベクトルのノルムの値を用いて残差が最小となる最適反復回数付近で反復を打ち切りを行うことにより，残差の増大を緩和できることが可能であるか検証を行った．結果，最低反復回数を設定し，反復の打ち切りを行うことで残差の増大を緩和が可能であることが示された．また，最低反復回数の設定数によっては，残差が増大してしまうことが示された．したがって残差が最小となる最適反復回数に近い回数での打ち切りを行うためには，最適な最低反復回数を決定することが不可欠であるが，最適な最低反復回数の決定法を示すことはできなかった．

5.2 今後の課題

今後の課題は，最適な最低反復回数を決定する手法を検討することである．

謝辞

本研究を行うにあたり，御助言頂いた高知工科大学情報システム工学科の福本昌弘助教授に心底感謝致します．

また，本研究を審査してくださる坂本明雄教授，情報システム工学科の先生に大変感謝致します．

さらに，本論文を完成させるにあたり笑いを提供して頂いた浜崎真二様，佐伯幸郎様には大変お世話になりました．また，食糧を提供して頂いた坂本研究室の河内友彦様，するどい助言を頂いた福富英次様に感謝してます．

最後に，長い時間をともにした福本研究室のみんなに感謝します．

参考文献

- [1] 水口智映子，“誤差を伴う共役勾配法における反復回数の最適化，”平成 14 年度高知工科大学学士学位論文，2003．
- [2] 戸川隼人，共役勾配法，教育出版，1997．
- [3] 長谷川里美，長谷川秀彦，藤野清次，反復法 Templates，朝倉書店，1996．
- [4] 仁木滉，河野敏行，楽しい反復法，共立出版，1998.