

第 10 単元 Hurwitz の安定性判別法

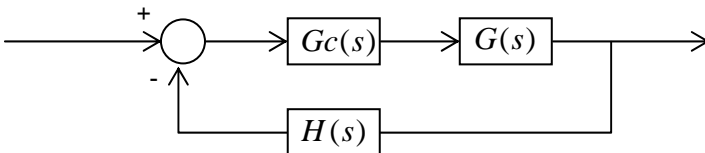
学習のポイント

- ・ 安定判別の一般論
- ・ Hurwitz の方法

一般のフィードバック系の安定判別はなかなか難しいものである。それはなぜか？よく理解してほしい。

【安定判別に関する一般論】

一般のフィードバック系



全伝達関数：

$$W(s) = \frac{Gc(s) \cdot G(s)}{1 + Gc(s) \cdot G(s) \cdot H(s)}$$

特性方程式： $1 + Gc(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = 0$

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

$$a_0 (s - P_1)(s - P_2)(s - P_n) = 0$$

もし、 が得られれば安定判別は簡単である
 ところが、これが難しい

便利な方法が必要である。

Hurwitz の方法

その困難な安定判別方法を割合と簡単に行おうとする方法を昔の数学者が見つけた。

Hurwitz の判別法について述べる。

Hurwitz の方法

係数 a_0, a_1, \dots, a_n で得られる Hurwitz 行列式

$$H_1 = a_1 \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad H_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

システムが安定である必要十分条件は次のようである

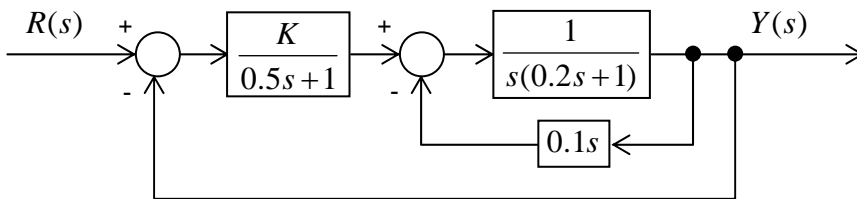
係数 a_0, a_1, \dots, a_n がすべて正である。

これらの行列式において $H_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ である。

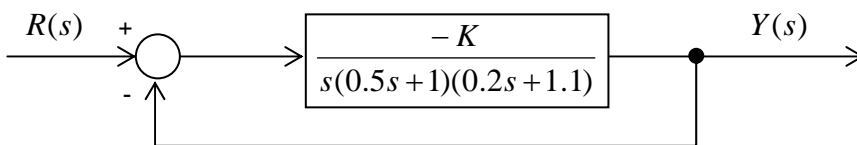
すなわち、 $H_1 > 0, H_2 > 0, \dots, H_n > 0$

その応用例により使い方を見ていただきたい。また、実際にコンピューターシミュレーションによりその時間応答をみる。

【例 1】図に示すフィードバック制御系が安定であるための K の値の範囲を求める。



内部のフィードバック系の閉ループ系伝達関数 $G_1(s)$ を求め、さらにそれを基に整理して次のような図にまとめられる。



したがって、全体のフィードバック制御系の閉ループ系伝達関数は次のように求まる。

$$W(s) = \frac{K}{0.1s^3 + 0.75s^2 + 1.1s + K}$$

特性方程式 $D(s)$ は次のようになる。

$$D(s) = 0.1s^3 + 0.75s^2 + 1.1s + K$$

Hurwitz の判別法を用いて解く。特性方程式 $D(s)$ を 10 倍して考えると楽である。

$$D(s) = s^3 + 7.5s^2 + 11s + 10K$$

Hurwitz 行列式は次のようになる。

$$H_3 = \begin{vmatrix} 7.5 & 10K & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 0.75 & 10K \end{vmatrix}$$

特性方程式 $D(s)$ の係数はすべて正であり、

$$H_1 = 7.5$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 7.5 & 10K \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 7.5 \times 11 - 10K > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 7.5 & 10K & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 0.75 & 10K \end{vmatrix} = 7.5 \times 10 \times 10K - (10K)^2 > 0$$

これより制御系が安定である条件はやはり次のようになる。

$$0 < K < 8.25$$

演習問題：

1．五つのシステムの伝達関数で表すシステムの安定性について調べよ。

$$(1) \quad G_1(s) = \frac{(s-10)}{s^5 + 1.6s^4 + 7.6s + 103}$$

$$(2) \quad G_2(s) = \frac{(s-12)}{s^2 + 6s - 14.3}$$

$$(3) \quad G_3(s) = \frac{(s-1)}{(s-1)(s+2)(s+3)}$$

$$(4) \quad G_4(s) = \frac{(s-7)}{(s+1)(0.1s^2 + 0.5s + 0.6)}$$

$$(5) \quad G_5(s) = \frac{(s-25)}{(s-2.4)(s^2 + 19s + 90)}$$

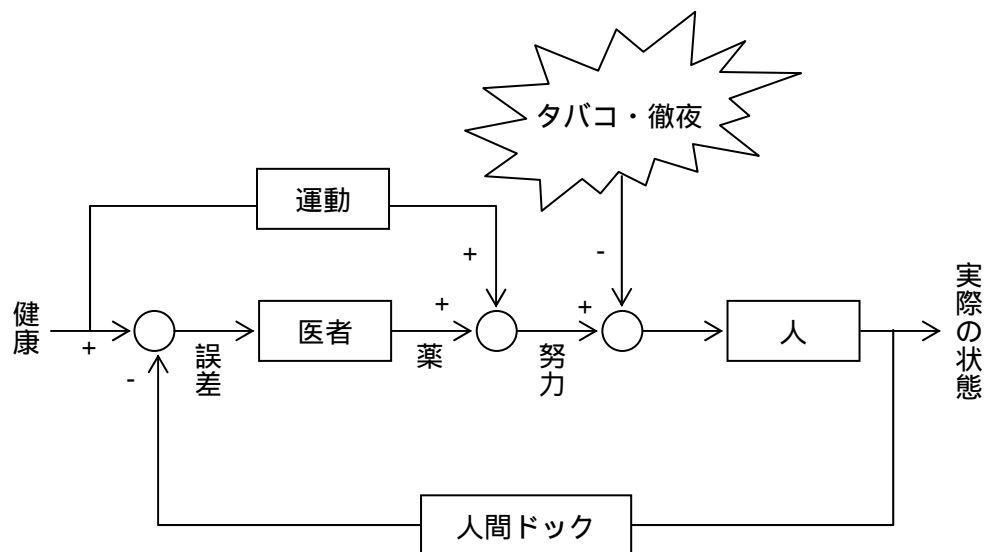
2．Hurwitz の方法を利用して次のシステムの安定性を判別せよ。

$$(1) \quad G_1(s) = \frac{(s^2 - 14.2)}{s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$$

$$(2) \quad G_2(s) = \frac{(s^2 - 4.5)}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 6}$$

$$(3) \quad G_3(s) = \frac{(s^2 - 4.5)}{s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 6s + 7}$$

健康に十分注意して、



本来持っている実力を発揮しましょう！

